МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ ГОРОДСКОГО ХОЗЯЙСТВА

А.В. Белогурова

Конспект лекций по курсу

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Теория вероятностей и математическая статистика

Раздел
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

(для студентов 2 курса дневной формы обучения бакалавров направления 6.030504 – «Экономика предприятий», 6.030509 – «Учет и аудит»)

ХАРЬКОВ – ХНАГХ – 2008

Конспект лекций по курсу «Математика для экономистов: Теория вероятностей и математическая статистика» /для студентов 2 курса дневной формы обучения бакалавров направления 6.030504 – «Экономика предприятий», 6.030509 – «Учет и аудит» /. Сост.: А.В. Белогурова – Харьков: ХНАГХ, 2008. – 68 с.

Составитель: А.В. Белогурова

Рецензент: д.т.н., проф. Тевяшев А.Д. (Харьковский национальный университет радиоэлектроники)

Рекомендовано кафедрой *"Прикладной математики и информационных технологий"*, протокол № *9* от *1 февраля* 2008г.

Раздел 1. Теория вероятностей.

Теория вероятностей (ТВ) – математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений.

Часть 1. Случайные события

Эмпирические и логические основы теории вероятностей. Основные определения

Под ***опытом*** (экспериментом, испытанием) понимают некоторую совокупность условий, в которых наблюдается то или иное явление, фиксируется тот или иной результат.

Событием (или **случайным событием**) называется всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Стрелок стреляет по мишени. Выстрел – это **опыт**.
Попадание (промах)– это **событие**.
Из урны, в которой имеются цветные шары, наудачу вынимают один шар.
Извлечение шара – **опыт**,
Появление белого (черного, красного и др.) шара – **событие**.

События обозначаются большими латинскими буквами, например, A, B, C, D.

Вероятностью события называется численная мера степени объективной возможности этого события.

Вероятности событий: P(A), P(B), P(C), P(D).

События бывают: достоверные, возможные и невозможные.

Достоверным называется событие, которое в результате опыта непременно должно состояться (достоверное событие обозначается **U)**. $P(U)=1$.

Возможным называется событие, которое в результате опыта может или произойти или не произойти. $0<P(V)<1$.

Невозможным называется событие, которое в результате опыта не может произойти (невозможное событие обозначается $\varnothing$). $P(\varnothing)=0$.

Эксперимент с однократным бросанием игральной кости.

<u>Достоверное событие</u> – выпадение числа в пределах от 1 до 6.
Возможное событие - выпадение числа 3.
Возможное событие – выпадение четного числа, т.е. 2, 4, 6.
<u>Невозможное событие</u> -выпадение десяти очков .

Таким образом, **вероятность любого события A:** $\boxed{0 \le P(A) \le 1}$.

Возможные события можно разделить на совместные и несовместные.

<u>Совместными</u> называют такие события, когда наступление одного из событий не исключает наступления других событий.

Несколько событий в опыте называются ***<u>несовместимыми</u>***, если никакие два из них не могут произойти одновременно.

Эксперимент с однократным бросанием игральной кости.
<u>Два несовместных</u> события: выпадение "*2*" и выпадение *нечетного числа очков.*
<u>Два совместных</u> события: выпадение **"2"** и выпадение **четного числа очков**.

<u>Полной группой событий</u> называются несколько попарно несовместных событий таких, что в результате опыта непременно должно произойти одно из них.

Эксперимент с однократным бросанием игральной кости.
<u>Полную группу событий</u> составляют события $\{A, B, C, D, E, F\}$, где A – появление 1, B – 2, C – 3, D – 4, E – 5, F - 6 очков при бросании игральной кости.
<u>Полную группу событий</u> составляют два события $\{A, B\}$, где A – появление четного числа очков, а B - нечетного числа очков при бросании игральной кости.

Несколько событий в опыте называются ***<u>равновозможными</u>***, если при условиях симметрии опыта нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое.

Эксперимент с однократным бросанием игральной кости.
<u>Шесть событий</u>: появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при бросании игральной кости являются <u>равновозможными</u> событиями, так как частота их появления одинакова и одинакова вероятность.

Два события: выпадение единицы и четного числа очков при бросании игральной кости не являются равновозможными, вероятность появления четного числа очков в три раза выше вероятности появления единицы.

Если несколько событий: несовместны, равновозможные и образуют полную группу событий, то они называются ***случаями*** (элементарными исходами опыта).

Случаи бывают *благоприятствующими* и *не благоприятствующими*. Случай называется ***благоприятствующим*** событию, если появление этого случая влечет за собой появление события.

Эксперимент с однократным бросанием игральной кости.

Если событие А заключается в выпадении четного числа очков, то благоприятствующими случаями (или элементарными исходами) является появление 2, 4 или 6 очков при бросании игральной кости. Выпадение 1, 3 или 5 очков являются не благоприятствующими исходами для события А.

Классическое определение вероятности

Вероятность события А - это отношение количества случаев, которые *благоприятствуют* **А** к *общему количеству случаев* в данном эксперименте. Если ***m*** - количество случаев, которые благоприятствуют **А**, ***n*** - общее количество случаев в данном опыте, то $\boxed{P(A)=\frac{m}{n}}$.

Игральная кость подброшена 1 раз. Найти вероятность того, что на верхней грани окажется число 2. У данного опыта 6 исходов $\{1,2,3,4,5,6\}$ ($n=6$), количество благоприятствующих исходов – это количество двоек на гранях кубика ($m=1$). Значит вероятность выпадения двойки $P=\frac{1}{6}$.

Игральная кость подброшена 1 раз. Найти вероятность того, что на верхней грани окажется четное число. У данного опыта 6 исходов $\{1,2,3,4,5,6\}$ ($n=6$), количество благоприятствующих исходов – это количество четных чисел, т.е. 2, 4, 6 ($m = 3$). Значит вероятность выпадения двойки $P = \frac{3}{6} = 0.5$.

В коробке лежат 3 красных, 5 белых и 2 черных шара. Из коробки наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что этот шар будет белый (черный)? Общее количество шаров в ящике $n = 3 + 5 + 2 = 10$, количество подходящих исходов опыта $m = 5$ ($m = 2$). Следовательно вероятность извлечь белый шар $P = \frac{5}{10}$, черный - $P = \frac{2}{10}$.

Элементы комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, занимающийся подсчетом комбинаций, составленных из элементов множества и подчиненных тем или иным условиям.

I. **Перестановки**. ***Перестановкой*** какого-то количества объектов называется любое расположение этих объектов в определенном линейном порядке. Например, имеем некоторое множество $\{\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu\}$, состоящее из 5 элементов. Перестановками будут любые последовательности из всех элементов множества, отличающихся только порядком следования элементов $\{\beta, \alpha, \gamma, \lambda, \mu\}$ или $\{\lambda, \gamma, \alpha, \beta, \mu\}$. Возникает вопрос, как подсчитать количество перестановок? Количество перестановок из ***n*** элементов равно $\boxed{P_n = n!,}$ $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$. $\boxed{0! = 1}$. Количество перестановок, которые можно составить из 5 элементов равно $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Задача № 1: Сколькими способами на полке можно расставить 6 книг?
Решение: Исходное множество содержит 6 элементов (книг). Мы оперируем всеми элементами множества. Расставляя книги на полке, мы учитываем порядок следования книг (порядок важен), поэтому надо применить формулу $P_6 = 6! = 720$.
Ответ: шесть книг на полке можно разместить 720 способами.

II. **Размещения**. ***Размещением*** называется любая перестановка из ***r-элементов***, которые входят в исходное множество, состоящее из ***n*** элементов.

Приведем в качестве примера четыре размещения, составленных из множества $\{\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu\}$. Пусть $r = 3$, т.е. мы составляем тройки. $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\{\gamma, \alpha, \beta\}$, $\{\gamma, \beta, \lambda\}$, $\{\mu, \lambda, \beta\}$. Обратите внимание на первые два размещения $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\{\gamma, \alpha, \beta\}$, они отличаются только порядком следования. Размещения от перестановок отличаются тем, что размещения составляются не из всех элементов множества. Общим для размещений и перестановок является то, что и в том, и в другом случаях порядок следования элементов важен. Как определить, сколько таких размещений можно получить? Общее количество размещений обозначается: A_n^r, где $r < n$. Количество размещений из n-элементов по r определяется по формуле $A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$. Значит, из 5 элементов мы можем составить $A_5^3 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 60$ троек.

Задача № 2: В ящике лежит 7 книг. Студент произвольным образом берет 3 из них и расставляет их на полке. Сколькими способами он может это сделать?

Решение: Поскольку студент расставляет на полке только 3, а не все 7 книг и порядок расположения книг на полке имеет значение, применяем формулу для подсчета размещений $A_7^3 = \dfrac{7!}{(7-3)!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 210$.

Ответ: Выбрать и расположить книги на полке студент может 210 способами.

III. **Сочетания**. ***Сочетание*** - это набор объектов, которые рассматриваются без учета их порядка. **Сочетанием** из ***n-элементов*** по ***r*** называется произвольное неупорядоченное подмножество, состоящее из ***r*** элементов исходного множества.

Сочетания от размещений отличаются тем, что в сочетаниях учитывается только состав выбранных элементов, а порядок их следования не важен. Поэтому среди сочетаний не могут существовать $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\{\gamma, \alpha, \beta\}$ элементы, поскольку их состав одинаков. Общее количество сочетаний обозначается: C_n^r, где $r \le n$ Количество сочетаний из ***n-элементов*** по ***r*** находится по формуле $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$. Узнаем сколько сочетаний по три элемента можно получить из 5 элементов исходного множества $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!\cdot(5-3)!} = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2} = 10$. В нашем примере, количество сочетаний оказалось в 6 раз меньше, чем количество размещений. Почему именно в 6 раз? Составляя сочетания из размещений, мы должны из каждого набора троек исключить все перестановки по три элемента, т.е. $3! = 6$ комбинаций.

Задача № 3: В ящике лежит 7 книг. Студент произвольным образом берет 3 из них. Сколькими способами он может это сделать?
Решение: В этом случае порядок книг не важен, важно лишь наименование книг, здесь применяется формула для подсчета сочетаний $C_7^3 = \dfrac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{6\cdot 4!} = 35$.
Ответ: Выбрать три книги из семи студент может 35 способами.

Полезные формулы: $C_n^0 = 1$; $C_n^n = 1$; $C_n^1 = n$.

IV. **Правило сложения.** Если ***n*** действий, которые взаимно исключают друг друга, могут быть выполнены первое m_1, второе m_2 способами и так далее, n-тое m_n способами, то выполнить какое-то одно из этих действий можно $\sum_{i=1}^{n} m_i$ способами.

Задача № 4: В группе 10 девушек и 15 парней. Преподаватель вызывает одного студента к доске. Сколькими способами он может это сделать?
Решение: Преподаватель вызывает только одного студента или девушку или парня (два действия, взаимно исключающие друг друга). Вызвать девушку преподаватель может 10 способами, вызвать парня 15 способами.

Ответ: Значит, вызвать студента преподаватель может 10+15=25 способами.

V. **Основной принцип комбинаторики (правило умножения).** Пусть нужно последовательно выполнить k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, после этого второе - n_2 способами, потом третье - n_3 способами и т.д. до k-ого действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены $s = \prod_{i=1}^{k} n_i = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Задача № 5: Из города А в город В ведут три дороги, из города В в город С ведут две дороги. Сколькими способами автотурист может попасть из города А в город С?
Решение: В этой задаче автотуристу необходимо выполнить два действия: первое – добраться из города А в город В, **и** второе – из города В в город С. Первое действие он может выполнить 3 способами, а второе 2 способами.
Ответ: Добраться из города А в город С он может $s = 3 \cdot 2 = 6$ способами.

Приемы комбинаторики удобно применять для нахождения вероятности события, а именно для подсчета количества благоприятствующих исходов опыта и для подсчета общего количества исходов в опыте.

Задача № 6 (о шарах). В коробке лежат 4 белых и 3 черных шара. Вынимают наугад два шара. Найти вероятность того, что они: оба шара - белые; оба шара - черные; шары разноцветные.
Решение: (1-й способ - с использованием классической формулы вероятностей и комбинаторики). Обозначим события:
А - оба шара - белые,
В - оба шара - черные,
С - шары разноцветные.
Для решения задачи используем классическую формулу вероятности
$P(A) = \frac{m}{n}$,

где n – общее количество случаев в опыте;

m_A - количество благоприятных случаев для события A;

m_B - количество благоприятных случаев для события B;

m_C - количество благоприятных случаев для события C;

m_D - количество благоприятных случаев для события D.

n - различные комбинации по 2 шара из (4+3)=7, то есть $n = C_7^2 = 21$. Это справедливо для всех четырех событий.

m_A - различные комбинации по 2 шара из 4 белых, то есть $m_A = C_4^2 = 6$. Таким образом, $P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$.

m_B - различные комбинации по 2 шара из 3 черных, то есть $m_B = C_3^2 = 3$. Таким образом, $P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.

m_C - один белый, другой черный, то есть $m_C = C_4^1 \cdot C_3^1 = 4 \cdot 3 = 12$ (по правилу умножения). Таким образом, $P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$.

По результатам п.1 и п.2 два белые шара можно получить $m_A = 6$, а два черных - $m_B = 3$ способами. Тогда по правилу сложения $m_D = 6 + 3 = 9$. Таким образом, $P(D) = \frac{m_D}{n} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$.

Ответ: Вероятность того, что: оба шара – белые равна 2/7; оба шара - черные равна 1/7; шары разноцветные равна 4/7; пара шаров или белая или черная равна 3/7.

Пространство событий

Пространством событий называется произвольный набор (множество) элементарных событий таких, что каждому исходу испытания отвечает лишь один элемент из этого набора (множества).

Рассмотрим эксперимент: однократное подбрасывание игральной кости.

Выпадение 1, 2, 3, 4, 5, и 6 очков - это случаи, или элементарные события. Обозначим их как элементы множества - $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, так что элемент a_1 (элементарное событие) будет соответствовать появлению 1, элемент a_2 соответствовать появлению 2 и т.д.

Тогда U = $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ - есть множество элементарных событий, или ***пространство событий***.

События, которым соответствует только один результат опыта, называют *элементарными событиями*.

Всю совокупность элементарных событий для опыта называют *пространством событий* этого опыта.

Случайные события можно рассматривать как подмножества, которые составлены из элементов множества **U**. Элементы, которые входят в подмножество для данного события являются *благоприятствующими* этому событию.

Для эксперимента однократного бросания игральной кости:

B = $\{a_2, a_4, a_6\}$ - выпадение четного числа очков, события a_2, a_4, a_6 являются благоприятствующими событию B

C = $\{a_1, a_2\}$ - выпадение числа очков ≤ 2, события a_1, a_2 являются благоприятствующими событию C

D = $\{a_6\}$ - выпадение 6 очков

Для одного и того же опыта могут быть построены несколько пространств событий. Это зависит от того, какие элементарные события выбраны для построения пространства. Например.

Для эксперимента однократного бросания игральной кости:

U_1 = $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ – пространство событий, где a_i - выпадение числа i на верхней грани кубика ($i = 1,2,3,4,5,6$)

U_2 = $\{b_1, b_2\}$ – пространство событий, где b_1 - четные числа от 2 до 6; b_2 - нечетные числа от 1 до 5.

Для пространства событий из ***n*** элементов, где возможно два исхода (произошло или не произошло) общее количество элементарных событий равно 2^n.

Если событию **E** не благоприятствует ни один элемент из пространства событий, то оно называется *невозможным* (обозначается Ø).

Если событие **F** включает все элементарные события, то оно называется *достоверным* (обозначается **U**).

Задача № 6 (о шарах). В коробке лежат 4 белых и 3 черных шара. Вынимают наугад два шара. Найти вероятность того, что они: оба шара - белые; оба шара - черные; шары разноцветные.

Решение: (2-й способ - с использованием пространства событий).

	Б1	*Б2*	*Б3*	*Б4*	***Ч1***	***Ч2***	***Ч3***
Б1	---	ББ	ББ	ББ	Б**Ч**	Б**Ч**	Б**Ч**
Б2	ББ	---	ББ	ББ	Б**Ч**	Б**Ч**	Б**Ч**
Б3	ББ	ББ	---	ББ	Б**Ч**	Б**Ч**	Б**Ч**
Б4	ББ	ББ	ББ	---	Б**Ч**	Б**Ч**	Б**Ч**
Ч1	**Ч**Б	**Ч**Б	**Ч**Б	**Ч**Б	---	**ЧЧ**	**ЧЧ**
Ч2	**Ч**Б	**Ч**Б	**Ч**Б	**Ч**Б	**ЧЧ**	---	**ЧЧ**
Ч3	**Ч**Б	**Ч**Б	**Ч**Б	**Ч**Б	**ЧЧ**	**ЧЧ**	---

Обозначим события:

A - оба шара - белые,

B - оба шара - черные,

C - шары разноцветные.

Выделим элементы пространства событий цветами в соответствии с событиями *A*, B, *C*.

	Б1	*Б2*	*Б3*	*Б4*	***Ч1***	***Ч2***	***Ч3***
Б1	---	ББ	ББ	ББ	Б**Ч**	Б**Ч**	Б**Ч**
Б2	ББ	---	ББ	ББ	Б**Ч**	Б**Ч**	Б**Ч**
Б3	ББ	ББ	---	ББ	Б**Ч**	Б**Ч**	Б**Ч**
Б4	ББ	ББ	ББ	---	Б**Ч**	Б**Ч**	Б**Ч**
Ч1	**Ч**Б	**Ч**Б	**Ч**Б	**Ч**Б	---	**ЧЧ**	**ЧЧ**
Ч2	**Ч**Б	**Ч**Б	**Ч**Б	**Ч**Б	**ЧЧ**	---	**ЧЧ**
Ч3	**Ч**Б	**Ч**Б	**Ч**Б	**Ч**Б	**ЧЧ**	**ЧЧ**	---

$$P(A)=\frac{12}{42}=\frac{2}{7};$$

$$P(B)=\frac{6}{42}=\frac{1}{7};$$

$$P(C)=\frac{24}{42}=\frac{4}{7};$$

Таким образом, вероятность того, что оба шара будут белыми, составит 2/7, вероятность того, что оба шара будут черными, составит 1/7, и вероятность того, что шары будут разноцветными, составит 4/7. Это событие является наиболее вероятным.

Основные теоремы ТВ

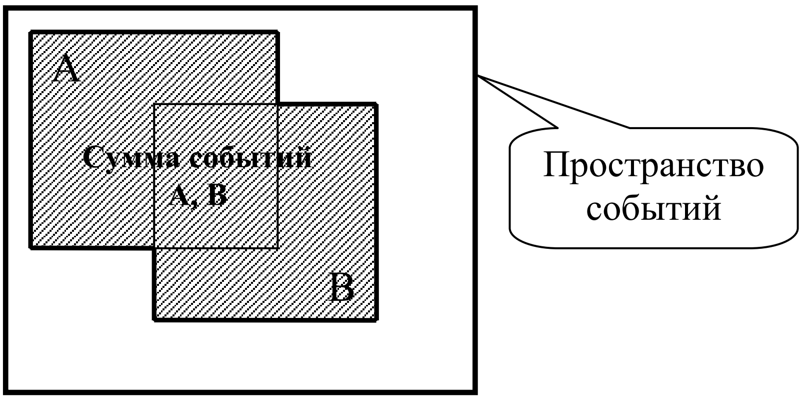
Операции над событиями.

I. ***Суммой нескольких событий*** называется событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Сумма двух событий А и В это событие, которое состоит в появлении или (А) **или** (В) **или** (А **и** В вместе).

Операция сумма на пространстве событий обозначается значком $\cup$ (объединение).

Для эксперимента однократного бросания игральной кости: Пусть А = {2}, В = {четное}, тогда $A+B=A\cup B=\{2,4,6\}$. Пусть А = {2}; В = {нечетное}, тогда $A+B=A\cup B=\{1,2,3,5\}$.



Сумма вероятностей двух событий:

для двух несовместных событий (то есть когда $A\cap B=\varnothing$).

$$P(A+B)=P(A)+P(B);$$

для двух совместных событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

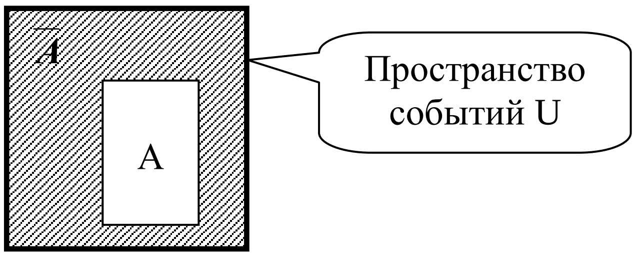
❖ ***Теорема 1***. Сумма вероятностей событий $A_1,\ A_2,\ldots,A_n$, которые составляют полную группу, равна **1**:

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots+P(A_n)=1.$$

❖ ***Теорема 2***. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(AB) .$$

II. Событие $\overline{A}$ называют ***противоположным*** событию A, если события A и $\overline{A}$ несовместные и событие $\overline{A}$ состоит в том, что событие A не произойдет. Сумма противоположных событий равна достоверному событию: $\overline{A} + A = U$



Для эксперимента однократного бросания игральной кости. Если A ={четное число очков}, тогда $\overline{A}$ = {нечетное число очков}. Если A ={ число очков <=2 }, тогда $\overline{A}$ = { число очков >2 }.

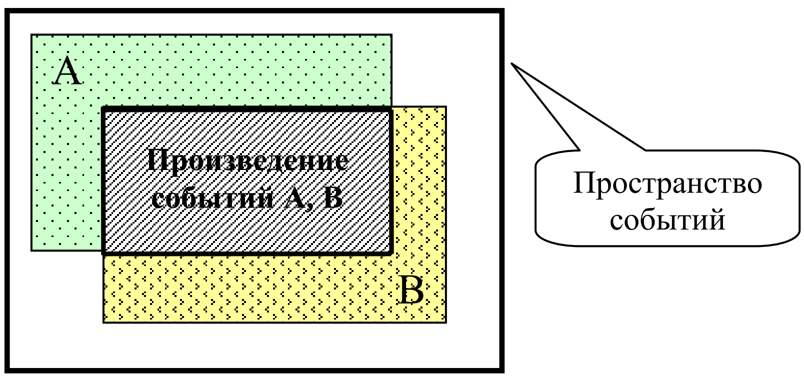
❖ ***Теорема 3***. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

III. ***Произведением нескольких событий*** называется событие, которое состоит в совместном появлении всех этих событий.

Произведение двух событий А и В это событие состоящее в совместном появлении событий А **и** В.

Операция произведение на пространстве событий обозначается значком $\cap$ (пересечение).

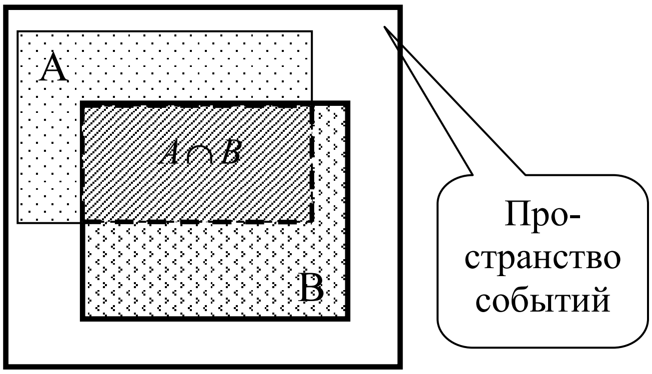


Для эксперимента однократного бросания игральной кости. Пусть A = {2}, а B = {четное}, тогда $A * B = A \cap B = \{2\}$.
Если A = {2}, а B = {нечетное}, тогда $A * B = A \cap B = \{\varnothing\}$, так как произведение несовместных событий равно невозможному событию.

<u>Условной вероятностью</u> P(B/A) называют вероятность события B, рассчитанную в предположении, что событие A уже наступило.

$$P(A/B)=\frac{N_{A\cap B}}{N_B},$$

где $N_{A\cap B}$ - количество элементов, составляющих пересечение A и B;
N_B - количество элементов, составляющих событие B.



Два события называются ***<u>независимыми</u>*** (зависимыми), если вероятность одного из них <u>не зависит</u> (зависит) от того, произойдет или не произойдет второе событие.

События A и B <u>независимы</u>, если $P(A) = P(A/B)$ или $P(B) = P(B/A)$, если же безусловная и условная вероятности *<u>не равны</u>*, то события *<u>зависимы</u>*.

Опыт состоит в последовательном бросании двух монет. Пространство событий $\{ГГ, PP, ГP, PГ\}$. Рассматриваются события:
A – выпадение герба на первой монете;
B – выпадение хотя бы одного герба (один или два герба);
C – выпадение герба на второй монете.
Определим являются ли пары событий A и B, A и C, B и C зависимыми. Подсчитаем безусловные вероятности: $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{3}{4}$, $P(C)=\frac{1}{2}$. Подсчитаем условные вероятности: $P(A|B)=\frac{2}{3}$, $P(C|A)=\frac{1}{2}$, $P(B|C)=1$. Таким образом:

события A и B зависимые, поскольку $P(A)=\frac{1}{2} \neq P(A|B)=\frac{2}{3}$; события A и C независимые, поскольку $P(C) = \frac{1}{2} = P(C \mid A) = \frac{1}{2}$;

события B и C зависимые, поскольку $P(B) = \frac{3}{4} \neq P(B \mid C) = 1$.

Правило умножения: $P(A*B) = P(A)*P(B/A)$ для произвольных событий;

$P(A*B) = P(A)*P(B)$ для независимых событий (когда P(B/A) = P(B))

Свойства операций сложения и умножения:

$$A + B = B + A \qquad A*B = B*A$$

$$(A+B)+C = A+(B+C) \qquad (A*B)*C = A*(B*C)$$

$$A*(B+C) = A*B + A*C$$

Полезные формулы

Для Ø (невозможного события)	A+ Ø = A	A∗ Ø = Ø
Для U (достоверного события)	A+U = U	A∗ U = A
Для A (возможного события)	A+A = A	A∗ A = A

Задача № 7 (о шарах). В коробке лежат 4 белых и 3 черных шара. Вынимают наугад два шара. Найти вероятность того, что:

а) D - оба шара – одного цвета (или белого или черного цвета) $D = A \cup B$;

Решение:

а) Получим D как объединение A и B

	Б1	*Б2*	*Б3*	*Б4*	***Ч1***	***Ч2***	***Ч3***
Б1	---	ББ	ББ	ББ	БЧ	БЧ	БЧ
Б2	ББ	---	ББ	ББ	БЧ	БЧ	БЧ
Б3	ББ	ББ	---	ББ	БЧ	БЧ	БЧ
Б4	ББ	ББ	ББ	---	БЧ	БЧ	БЧ
Ч1	ЧБ	ЧБ	ЧБ	ЧБ	---	ЧЧ	ЧЧ
Ч2	ЧБ	ЧБ	ЧБ	ЧБ	ЧЧ	---	ЧЧ
Ч3	ЧБ	ЧБ	ЧБ	ЧБ	ЧЧ	ЧЧ	---

A -

B -

D -

$$P(D) = \frac{12}{42} + \frac{6}{42} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

б) E – первый шар черный, а второй белый (E_1 - первый шар черный; E_2 - второй белый) $E = E_1 \cap E_2$;

Получим E как пересечение зависимых E_1 и E_2

	Б1	Б2	Б3	Б4	Ч1	Ч2	Ч3
Б1	---	ББ	ББ	ББ	БЧ	БЧ	БЧ
Б2	ББ	---	ББ	ББ	БЧ	БЧ	БЧ
Б3	ББ	ББ	---	ББ	БЧ	БЧ	БЧ
Б4	ББ	ББ	ББ	---	БЧ	БЧ	БЧ
Ч1	ЧБ	ЧБ	ЧБ	ЧБ	---	ЧЧ	ЧЧ
Ч2	ЧБ	ЧБ	ЧБ	ЧБ	ЧЧ	---	ЧЧ
Ч3	ЧБ	ЧБ	ЧБ	ЧБ	ЧЧ	ЧЧ	---

E_1 -
E_2 -
E -

$$P(E) = P(E_1) \cdot P(E_2 \mid E_1) = = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{7} = \frac{12}{42}$$

в) F - 2Б/1Ч - второй белый <u>при условии</u>, что первый - черный. Событие $F = E_2 | E_1$

1 \ 2	Б1	Б2	Б3	Б4	Ч1	Ч2	Ч3
Б1	---	ББ	ББ	ББ	БЧ	БЧ	БЧ
Б2	ББ	---	ББ	ББ	БЧ	БЧ	БЧ
Б3	ББ	ББ	---	ББ	БЧ	БЧ	БЧ
Б4	ББ	ББ	ББ	---	БЧ	БЧ	БЧ
Ч1	ЧБ	ЧБ	ЧБ	ЧБ	---	ЧЧ	ЧЧ
Ч2	ЧБ	ЧБ	ЧБ	ЧБ	ЧЧ	---	ЧЧ
Ч3	ЧБ	ЧБ	ЧБ	ЧБ	ЧЧ	ЧЧ	---

E_1 -
E_2 -
F -

$$P(F) = P(E_2 \mid E_1) = = \frac{4}{6} = \frac{12}{18}$$

Модели надежности

<u>Надежность устройства</u> (системы, элемента) - это вероятность его безотказной работы за время t.

Задача № 8. *<u>Задача об инстанциях</u>*.

Несколько руководителей последовательно подчинены один другому. Каждый готов независимо утвердить некоторый проект с вероятностью $P(A_i) = p_i$. Какова вероятность того, что проект будет утвержден при последовательном прохождении инстанций?

—[1]—[2]—[3]— . . . —[N]—

Решение.

События, которые отвечают прохождению первой, второй и т.д. инстанций обозначим соответственно как $A_1, A_2 ... A_n$, прохождение всех инстанций, как А. По определению произведения событий, имеем $A = A_1 * A_2 * ... * A_n$ Поскольку множители по условию задачи независимы, по правилу умножения имеем:

$P(A) = P(A_1) * P(A_2) * \ldots * P(A_n)$

Например, если вероятности A_i для всех руководителей одинаковы и равны р, то $P(A) = p_1 * p_2 \ldots * p_n = p^n$

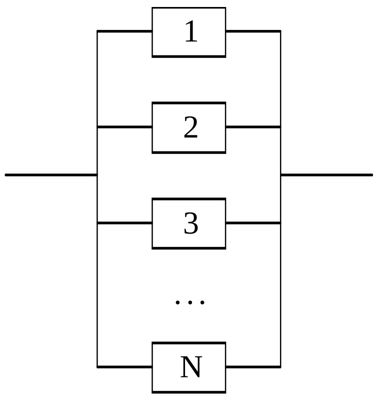
При р=0.9 $P = 0{,}9 \cdot 0{,}9 ... 0{,}9 = 0{,}9^n$ и если n=5 P≈ 0.53; а при n=10 P≈ 0.35.(!!)

Совет: ищите дорогу с минимумом инстанций!

Задача № 9. ***Задача о дублировании***.

n приборов работают независимо и дублируют друг друга. Найти вероятность прохождения сигнала в системе, если надежность каждого прибора известна (p_i).

Решение.



Сигнал проходит в системе, если он проходит, по крайней мере, по одному из приборов (обозначим как событие A). События, которые отвечают прохождению сигнала по первому, второму и т.д. приборам обозначим соответственно как $A_1, A_2 ... A_n$. По определению суммы событий имеем $A = A_1 + A_2 + ... + A_n$. События $A_1, A_2 ... A_n$ совместны, так как сигнал может проходить и по одному прибору, и по двум, и по трем и т.д. Использование теоремы 3 для определения вероятности А приводит в таком случае к довольно сложным расчетам. Поэтому удобнее перейти к противоположному событию - сигнал не проходит, то есть не работают все приборы (событие $\overline{A}$). По определению произведения событий $\overline{A} = \overline{A}_1 * \overline{A}_2 * \ldots * \overline{A}_n$. События, которые являются множителями, независимы по условию задачи, то есть используя правило умножения имеем $P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1) * P(\overline{A}_2) * \ldots * P(\overline{A}_n)$. В свою очередь по теореме 2 $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, откуда получаем конечную формулу для вероятности А, учитывая, что по той же теореме $P(A_i) + P(\overline{A}_i) = 1$ для любого i-го прибора.

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) .$$

Приведенная выше задача имеет широкое применение в самых разнообразных областях человеческой деятельности. Поэтому мы обобщим ее решение следующей теоремой.

❖ ***Теорема 4***. Вероятность хотя бы одного из событий $A_1, A_2 ... A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2 ... \overline{A}_n$. Обозначим $P(A_i) = p_i$ *и* $P(\overline{A}_i) = q_i$, *где* $p_i + q_i = 1$,

P(A) - вероятность того, что появится хотя бы одно из событий $A_1, A_2 ... A_n$, имеем формулу

$$\boxed{P(A) = 1 - q_1 * q_2 * \ldots * q_n}$$

Следствие. Если A_i имеют одинаковую вероятность p, соответственно $\overline{A}_i$ - q, то

$$P(A) = 1 - q^n$$

Замечание. Независимыми в совокупности будем считать события, которые попарно независимы, и каждое из которых, независимо с тремя, четырьмя, …n-1 событиями из тех, которые рассматриваются в испытании.

Задача № 10. ***Задача о количестве дублеров*** (обратная к задаче о дублировании).

n приборов в системе работают независимо и дублируют друг друга. Надежность каждого прибора одинакова и известна (p). Вероятность прохождения сигнала в системе задана как порог надежности Q, ни-же которого ее снижение недопустимо. Нужно найти число n (количество дублеров), которое обеспечит заданный порог надежности.

Решение

По следствию к теореме 4 имеем: $P(A) = 1 - q^n$, где A - вероятность прохождения сигнала в системе, $q = 1 - p$ - вероятность отказа для любого прибора из числа дублеров. По условию задачи $P(A) \geq Q, \quad откуда \quad 1 - q^n \geq Q, \quad или \quad q^n \leq 1 - Q$. Из последнего неравенства и находим n.

Задача № 11. ***Задача планирования семьи***.

Считая вероятность рождения девочки и мальчика одинаковой, определить, сколько детей нужно родить, чтобы с вероятностью не меньше 0.9 была хотя бы одна девочка.

Решение.

По условию задачи p=q=1/2. По результатам предыдущего решения находим:

$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1 - 0.9, \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0.1,$ логарифмируя, имеем $n \geq \log_{\frac{1}{2}} 0.1 \geq 3{,}33$

То есть нужно иметь не меньше четырех детей.

Алгебра гипотез

Формула *полной вероятности* используется для определения *средней* вероятности события A, которое может произойти только с одним из полной группы несовместных событий H_i, $i = 1,n$. При этом известны априорные (доопытные) вероятности событий H_i и условные вероятности наступления события A при условии, что произошло то или иное событие H_i.

События H_i принято называть *гипотезами*, поскольку средняя вероятность события A определяется в момент, когда неизвестно, какое из событий H_i произойдет и повлечет за собой наступление события A.

Гипотезы - это предположения об условиях опыта, которые исключают одна другую.

Гипотезы является случайным событиями.

Все гипотезы относительно какого-то опыта составляют полную группу событий.

❖Теорема 5. Если некоторое событие A может произойти только с одним из полной группы несовместных событий (гипотез) H_i ($i=1,n$) и известна *априорная вероятность $P(H_i)$* каждой гипотезы и *условные вероятности $P(A/H_i)$* события A при условии, что осуществилась та или иная гипотеза, то **полная, или средняя, вероятность события A** определяется по формуле ***полной вероятности***:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + ... + P(H_n) \cdot P(A/H_n) \cdot$$

Задача № 12. *Задача о видеомагнитофонах*

Завод выпускает видеомагнитофоны с гарантийным сроком эксплуатации один год. Известно, что 20% продукции будет эксплуатироваться в Заполярье, 75% - в местности с умеренным климатом, 5% - в пустыне. Известны также вероятности безотказной работы видеомагнитофонов в каждом регионе в течение гарантийного срока: 0,9 -

в Заполярье; 0,99 - в местности с умеренным климатом; 0,8 - в пустыне.

Необходимо определить какой процент изделий следует выпустить дополнительно к плану для замены отказавших в течение гарантийного срока. При этом считается, что при замене изделий последние не отказывают.

Решение. Введем обозначения:

A - безотказная работа видеомагнитофона;

H_1 - гипотеза, состоящая в том, что изделие будет эксплуатироваться в Заполярье;

H_2 - гипотеза, состоящая в том, что изделие будет эксплуатироваться в местности с умеренным климатом;

H_3 - гипотеза, состоящая в том, что изделие будет эксплуатироваться в пустыне.

Тогда вероятности осуществления гипотез, исходя из условия примера, составят:

для гипотезы H_1 величину $P(H_1) = 20\% / 100\% = 0{,}2$;

для гипотезы H_2 величину $P(H_2) = 75\% / 100\% = 0{,}75$;

для гипотезы H_3 величину $P(H_3) = 5\% / 100\% = 0{,}05$.

А соответствующие условные вероятности события A в соответствии с тем же условием составят: $P(A/H_1) = 0{,}9$; $P(A/H_2) = 0{,}99$; $P(A/H_3) = 0{,}8$.

Дополнительно к плану следует выпустить столько изделий, сколько их откажет во всех регионах. Искомый дополнительный процент изделий - это средняя вероятность отказа изделий по всем регионам, умноженная на 100%.

Определим сначала среднюю вероятность безотказной работы изделия:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\cdot P(A|H_i)=0{,}2\cdot 0{,}9+0{,}75\cdot 0{,}99+ +0{,}05\cdot 0{,}8=0{,}9625$$

Средняя вероятность отказа изделий по всем регионам определится как P($\overline{A}$) = 1 - P(A) = 1 - 0,9625 = 0,0375 .

Следовательно, процент изделий, который следует выпустить дополнительно к плану, составляет P($\overline{A}$) * 100% = 3,75% .

<u>Формула Байеса</u> используется в тех же условиях, что и *формула полной вероятности*. Единственное отличие состоит в том, что событие *A* уже произошло.

Формула Байеса позволяет определять **<u>апостериорные (послеопытные) вероятности гипотез *P(Hj /A)*,</u>** $j = 1,n$, т.е. условные вероятности гипотез при условии, что событие *A* произошло.

❖<u>Теорема 6</u>. Если некоторое событие *A* может произойти только с одним из полной группы несовместных событий (гипотез) H_i ($i=1,n$) и известны <u>*априорные вероятности гипотез* $P(H_i)$,</u> <u>*условные вероятности* $P(A/H_i)$</u> события *A* при условии, что осуществилась та или иная гипотеза, а также известно, что <u>*событие A произошло,*</u> то **<u>апостериорная вероятность гипотезы H_i</u>** определяется по **<u>формуле Байеса</u>**:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)},$$

где $P(A)$ - полная вероятность события А. Причем $P(H_i)$ априорная (доопытная) вероятность гипотезы, а $P(H_i/A)$ - апостериорная (послеопытная) вероятность гипотезы.

Прикладное значение формулы Байеса довольно велико. Она находит свое применение в распознавании образов для выявления объектов по их нечеткому изображению, технической диагностике для поиска неисправности, в медицинской диагностике для постановки диагноза больному, в радиолокационной технике для отделения сигнала от шума и во многих других задачах, когда необходимо выявить вероятную причину (гипотезу) происшедшего события. Формула Байеса, используя информацию о факте наступления события, обеспечивает коррекцию априорных вероятностей гипотез, что позволяет более объективно судить о причине, побудившей это событие.

Задача № 13. *Продолжение задачи о магнитофонах*.

Пусть на завод-изготовитель поступила рекламация на отказавший видеомагнитофон, условия эксплуатации которого были оговорены. Необходимо определить, в каком регионе вероятнее всего он эксплуатировался.

Решение. По условию задачи произошедшим событием является отказ видеомагнитофона. Если оставаться в рамках принятых обозначений, то это событие обозначается $\overline{A}$. Его средняя вероятность $P(\overline{A})$ уже рассчитана и составляет 0,0375 .

Условные вероятности события A при условии, что произошла та или иная гипотеза, определяются следующим образом:

$$P(\overline{A}/H_1) = 1 - P(A/H_1) = 1 - 0,9 = 0,1\ ;$$

$$P(\overline{A}/H_2) = 1 - P(A/H_2) = 1 - 0,99 = 0,01\ ;$$

$$P(\overline{A}/H_3) = 1 - P(A/H_3) = 1 - 0,8 = 0,20\ .$$

Апостериорные вероятности гипотез о предполагаемом регионе эксплуатации отказавшего видеомагнитофона, согласно *формуле Байеса*, определятся следующим образом:

для гипотезы H_1 (эксплуатация в Заполярье)

$$P\left(H_1 \mid \overline{A}\right)=\frac{P(H_1)P\left(\overline{A} \mid H_1\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\frac{0.2 \cdot 0.1}{0.0375}=0.5333;$$

для гипотезы H_2 (эксплуатация в местности с умеренным климатом)

$$P\left(H_2 \mid \overline{A}\right)=\frac{P(H_2)P\left(\overline{A} \mid H_2\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\frac{0.75 \cdot 0.01}{0.0375}=0.2;$$

для гипотезы H_3 (эксплуатация в пустыне)

$$P\left(H_3 \mid \overline{A}\right)=\frac{P(H_3)P\left(\overline{A} \mid H_3\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\frac{0.05 \cdot 0.2}{0.0375}=0.2667.$$

Таким образом, наиболее вероятным регионом, из которого поступила рекламация, является Заполярье. Данная гипотеза имеет самую большую апостериорную вероятность - 0,5333 .

Сущность формул Бейеса.

Формулы Бейеса позволяют сделать переоценку вероятностей гипотез после того, как становится известным результат опыта, в котором появилось событие, относительно которого эти гипотезы выдвигались.

Схема независимых испытаний

Если проводится несколько опытов причем вероятность события А в каждом опыте не зависит от результатов других опытов, то такие опыты называют *независимыми* относительно А.

Биномиальный эксперимент.

Биномиальный эксперимент состоит из *серии независимых испытаний*, каждое из которых приводит или к успеху, или к неудаче, то есть в каждом эксперименте всего два возможных исхода - отсюда и название: биномиальный.

Примеры биномиальных экспериментов.
стрелок: попал (или не попал) в мишень
деталь бракованная (или стандартная)
6 очков выпало (или выпало число, отличное от 6)
вратарь мяч поймал (или не поймал)

Чтобы эксперимент рассматривался как биномиальный и отвечал схеме Бернулли, необходимо выполнение следующих условий:

1. эксперимент должен состоять из фиксированного количества испытаний n;
2. каждое испытание приводит или к успеху, или к неудаче (только 2 исхода);
3. испытания должны быть независимыми одно от другого;
4. вероятность успеха p (неудачи q) должна быть постоянной для всех n испытаний.

❖Теорема 7. ***Формула Бернулли***.

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А появляется с одинаковой вероятностью p, то вероятность того, что в этих испытаний событие А произойдет ровно k раз (безразлично, в какой последовательности) определяется по формуле $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

Задача № 14. ***Задача о «экстрасенсе».***

Обычный человек примерно в половине случаев угадывает, в какой руке спрятан мелкий предмет. Какова вероятность того, что
а) ответ будет правильным в 3-х случаях из 4-х?
б) по крайней мере в 9-ти случаях из 10-ти ответ будет правильным.

Решение.

За успех принимаем событие: экстрасенс догадался, его вероятность p=1/2, за неудачу - экстрасенс не догадался, его вероятность 1-p=1/2.

а) Количество опытов n = 4, количество успехов k=3, p=1/2, q=1/2.

По формуле Бернулли имеем:

$P_4(3) = C_4^3 \cdot 0{,}5^3 \cdot (1-0{,}5)^{4-3} = 4 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$;

б) Количество опытов n = 10, количество успехов k - не меньше 9-ти, то есть 9 или 10, p=1/2, q=1/2. Поскольку события угадывания 9 и 10 случаев независимые, по правилу сложения имеем:

$P_{10}(9 \le k \le 10) = P_{10}(9) + P_{10}(10)$.

Каждое из слагаемых вычисляем по формуле Бернулли (теорема 7):

$$P_{10}(9) = C_{10}^9 p^9 (1-p)^{10-9} = 10 * \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0.0098$$

$$P_{10}(10) = C_{10}^{10} p^{10} (1-p)^0 = 1 * \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0.00098$$

Отсюда: $P_{10}(9 \le k \le 10) \approx 0.01$

Комментарий.

Результаты пунктов а) и б) показывают среднестатистическую вероятность угадывания. Их следует понимать таким образом, что нормальный человек при нескольких сериях из четырех попыток три раза угадает в четверти всего количества серий (пункт а)) и 9 или 10 из 10 попыток - всего в 1/100 из общего количества серий (пункт б)). Не исключено, что в конкретной серии испытаний нормальный человек тоже угадает 9 из 10, но если такое угадывание повторяется в значительном количестве серий, что превышает среднестатистический процент, то такого человека можно считать экстрасенсом (или мошенником).

Если количество независимых испытаний довольно большое, вместо формулы Бернулли целесообразно пользоваться локальной и интегральной теоремами Лапласа, которые дают приблизительный результат, который тем ближе к результату точной формулы Бернулли, чем больше количество испытаний.

Теоремы Муавра-Лапласа

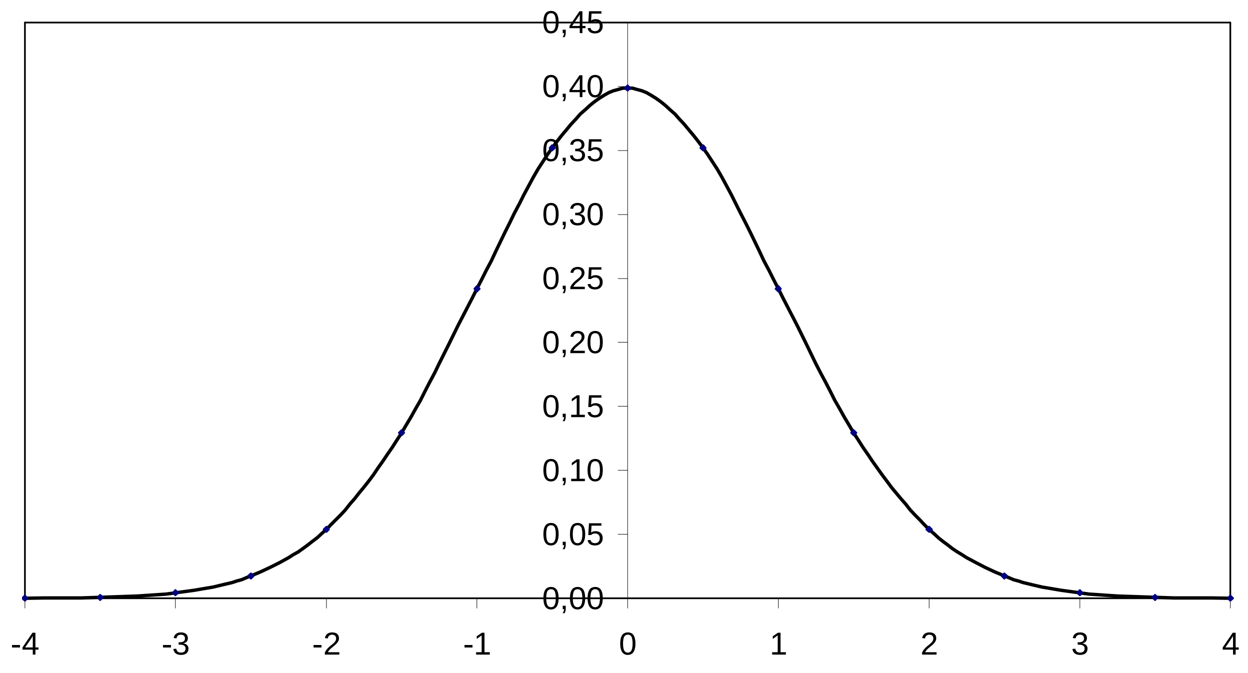
❖Теорема 8. ***Локальная теорема Лапласа***.

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с одинаковой вероятностью p, то вероятность того, что в этих испытаний событие A произойдет ровно k раз (безразлично, в какой последовательности) может быть оценена (тем точнее, чем больше n) по формуле

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \varphi(x),$$

где $x = \dfrac{k - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$, $q = 1 - p$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, четная функция: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

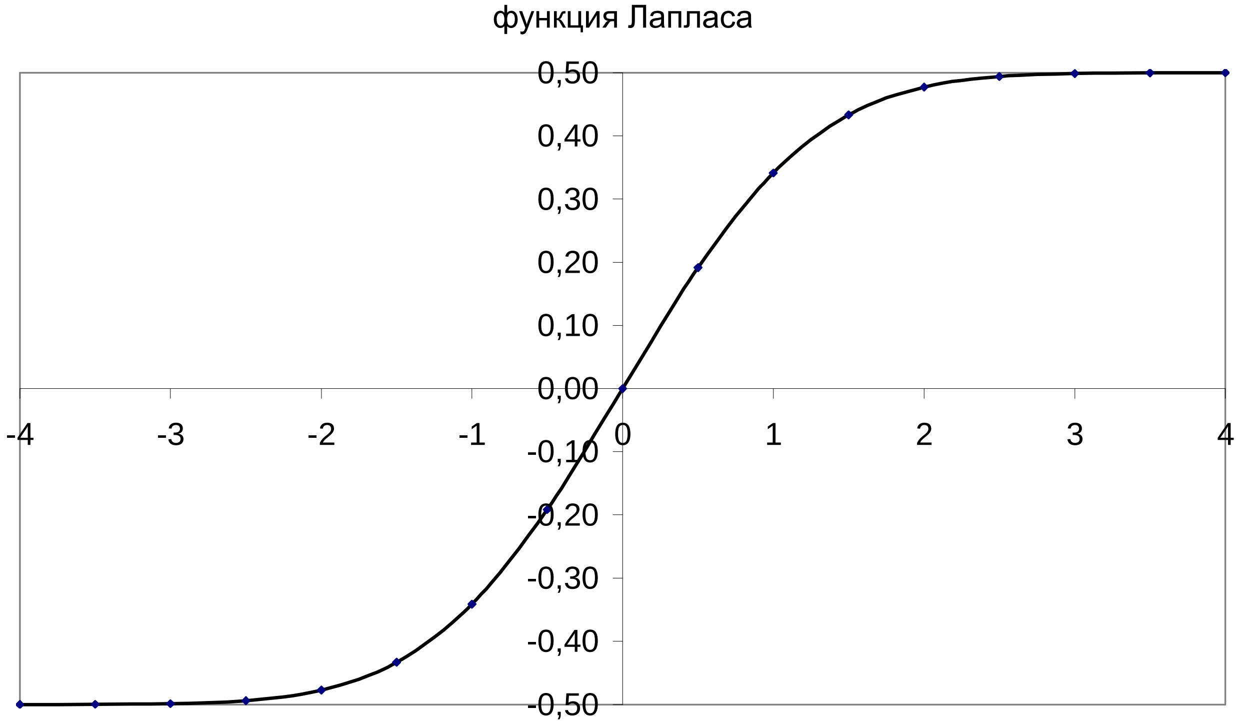
функция Гаусса



❖Теорема 9. ***Интегральная теорема Лапласа.***

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с одинаковой вероятностью p, то вероятность того, что в этих испытаниях событие A произойдет не менее k_1 раз и не более k_2 раз (безразлично, в какой последовательности) может быть оценена (тем точнее, чем больше n) по формуле $P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $x_1 = \dfrac{k_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$, где $x_2 = \dfrac{k_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$,

$\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, нечетная функция: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.



Задача № 15. ***Задача о редкой болезни***

Редчайшее заболевание встречается в 1% лиц некоторой популяции. Какая вероятность того, что в популяции с 1000 лиц это заболевания будет выявлен не больше чем у 20 особей?

Решение.

За успех принимаем событие: заболевание выявлено, вероятность этого события *p=1/100*, за неудачу - заболевание не выявлено, вероятность *q*=1-*p*=99/100. Количество опытов n =1000, количество успехов k - не больше 20-ти, то есть от 0 до 20, $k_1 = 0$, $k_2 = 20$.

В соответствии с интегральной формулой Лапласа (теорема 9):

$P_{1000}(0 \le k \le 20) = F(x_2) - F(x_1)$, где

$x_1 = \frac{0-1000\cdot 0{,}01}{\sqrt{1000\cdot 0{,}01\cdot 0{,}99}} \approx -3.2$, $x_2 = \frac{20-1000\cdot 0{,}01}{\sqrt{1000\cdot 0{,}01\cdot 0{,}99}} \approx 3.2$,

а значение функции нужно искать в таблице и поскольку $\Phi(x)$ нечетная, то $F(-3.2)=-F(3.2)$, а $F(3.2)=0.49931$.

В целом имеем

$$P_{1000}(0 \le k \le 20) = 2*F(3.2) \approx 2*0.49931 \approx 0.9986$$

Комментарий.

Найденная вероятность может казаться слишком большой, но в следующей части мы увидим, что важна не сама вероятность, а ее распределение по интервалам количества особей, например, для следующего интервала той же длины будем иметь:

$P_{1000}(20 \le k \le 40) \approx 0.0007$

Наивероятнейшее число

При решении задач, связанных с формулами Бернулли и Лапласа часто используют понятие *наивероятнейшего числа событий* (успехов, или неудач) для биномиального эксперимента. Оно характеризует биномиальный эксперимент в целом и показывает *самое вероятное количество наступлений успехов или неудач*. Наивероятнейшее число, которое обозначим k_0, рассчитывается по формуле $np - q \le k_0 \le np + p$, причем величины, которые используются в формуле, отвечают условиям теоремам 7-9.

Задача № 16. ***Задача об урожае***

Средняя всхожесть семян составляет 0,6. Селекционер садит 10 семян. Найти наивероятнейшее число взошедших семян и графически подтвердить это.

Решение

Найдем наивероятнейшее число $10\cdot 0.6 - 0.4 \le k_0 \le 10\cdot 0.6 + 0.6$,

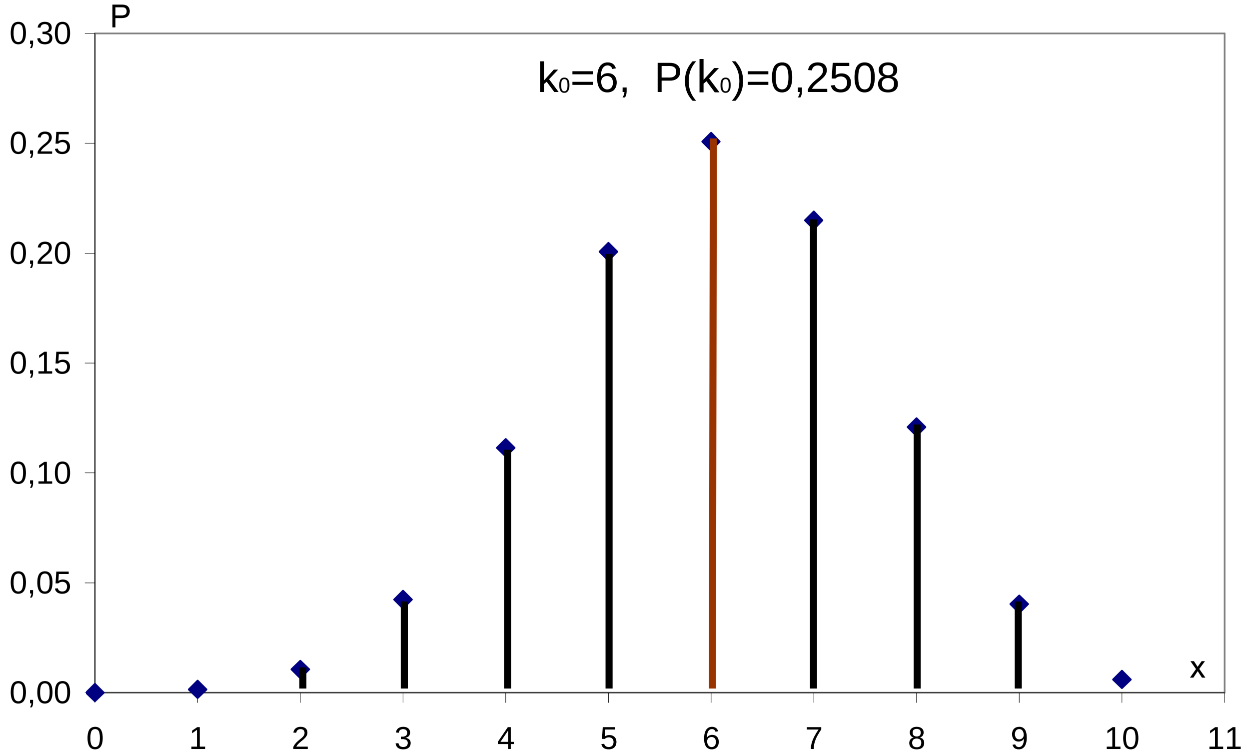
$5.6 \le k_0 \le 6.6$, следовательно $k_0 = 6$. Для графического подтверждения необходимо построить спектр биномиального распределения, а для этого найти все $P_n(k)$, где k меняется от 0 до n=10. Это можно сделать по формуле Бернулли.

$P_{10}(0)=0{,}0001$, $P_{10}(1)=0{,}0016$, $P_{10}(2)=0{,}0106$, $P_{10}(3)=0.0425$,

$P_{10}(4)=0.1115$, $P_{10}(5)=0.2007$, $\underline{P_{10}(6)=0.2508}$, $P_{10}(7)=0.2150$,

$P_{10}(8)=0.1209$, $P_{10}(9)=0.0403$, $P_{10}(10)=0.0060$.

Как видно из расчетов, самая максимальная вероятность $\underline{P_{10}(6)=0.2508}$ при $k_0=6$.



Часть 2.Случайные величины и процессы

Закон распределения СВ

Случайное событие, которое проявляется в появлении некоторого числа, называется ***числовым случайным событием***.

Полная группа числовых событий называется ***случайной величиной***, а сами эти события - значениями случайной величины.

Случайной называют величину, которая в результате опыта принимает какое-нибудь значение, заранее неизвестно которое.

Опыт: стрельба по мишени; **СВ:** количество попаданий при n выстрелах; **возможные значения:** 0,1,2,…,n
Опыт: бросание игральной кости; **СВ:** количество появлений 6-ти очков при n бросаниях; **возможные значения:** 0,1,2,…,n
Опыт: измерение размера детали, вырабатываемых некоторым станком; **СВ:** отклонение размера деталей от эталона; **возможные значения:** любое число, которое не превышает по модулю допустимые припуски.

Существует два типа случайных величин: дискретные СВ и непрерывные СВ.

Случайную величину называют ***дискретной***, если множество ее значений *конечно* и *счетно*. Значения дискретной случайной величины располагаются на числовой оси изолированно одно от другого.

Случайную величину называют ***непрерывной***, если множество ее значений *несчетно*. Значения непрерывной случайной величины изображаются на числовой оси как отрезки любой длины.

Законом распределения случайной величины называется любое соотношение, которое устанавливает связь между *возможными значениями* случайной величины и *соответствующими им вероятностями*.

Случайные величины в целом помечают большими латинскими буквами, а конкретные возможные значения - соответствующими малыми. Например, запись $X = x_i$ означает, что величина X принимает конкретное значение x_i, а запись $P(X = x_i)$ означает вероятность для случайной величины X принять значение x_i.

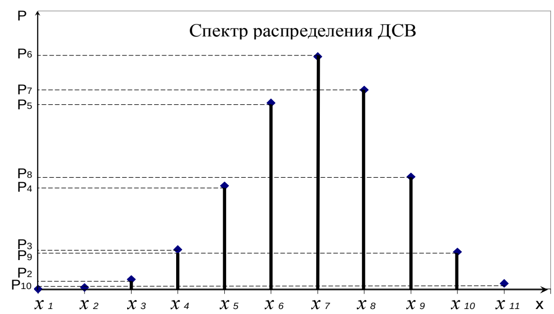
Закон распределения ДСВ представляют в виде ряда распределения.

Ряд распределения – это таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины и вероятности их наступления:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n	- *значения СВ*
P	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n	- *вероятности*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Графически закон распределения ДСВ изображается в виде спектра распределения.



Функция распределения и функция плотности случайной величины

Функцией распределения случайной величины X называют функцию $F(x)$, которая определяет для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше чем x:

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

Функция распределения дискретной случайной величины

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p_1, & x_1 \le x < x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 \le x < x_3 \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^{n-1} p_i, & x_{n-1} \le x < x_n \\ 1, & x \ge x_n \end{cases}$$

Нередко в литературе $F(x)$ называют *интегральной функцией распределения*.

Свойства функции распределения:

1. $0 \le F(x) \le 1$;

2. Функция распределения $F(x)$ - монотонно неубывающая,

$F(x_2) \geq F(x_1),\ \ \textit{если}\ x_2 > x_1;$

Следствие: $P(x_1 \leq x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1);$

3. Функция распределения $F(x)$ - непрерывна слева;

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0;$

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

Задача № 17. Задача о сдаче домов в эксплуатацию

Найти закон распределения случайной величины X - количества домов, сданных в эксплуатацию в срок, из 3 строящихся. Вероятность сдачи в эксплуатацию в срок для каждого дома одинакова и равна 0,9.

Решение.

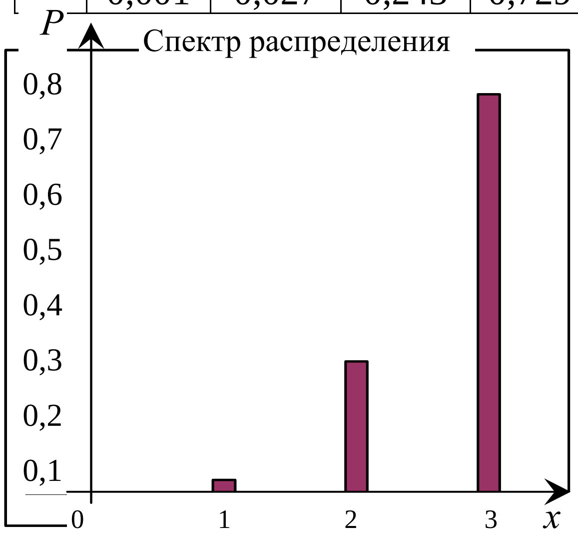
Поскольку мы имеем дело с дискретной случайной величиной, строим ряд распределения. Для расчета вероятностей применяем формулу Бернулли, так как условие задачи соответствует биномиальному эксперименту.

$P_1 = P_3(0) = C_3^0 0.9^0 0.1^3 = 0.001$ $P_2 = P_3(1) = C_3^1 0.9^1 0.1^2 = 0.027$

$P_3 = P_3(2) = C_3^2 0.9^2 0.1^1 = 0.243$; $P_4 = P_3(3) = C_3^3 0.9^3 0.1^0 = 0.729$

Составим ряд распределения

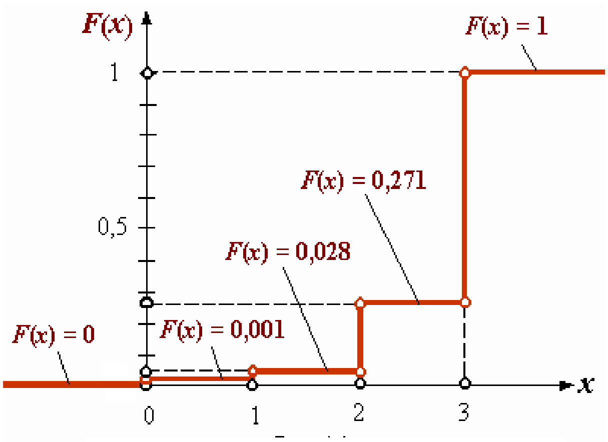
X	0	1	2	3
P	0,001	0,027	0,243	0,729



Получим функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0{,}001, & 0\le x<1\\ 0{,}028, & 1\le x<2\\ 0{,}271, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$$

Построим график функции распределения



Функция распределения ДСВ

Плотностью распределения $f(x)$ называют первую производную от *функции распределения*. Зачастую плотность распределения используют для задания непрерывных случайных величин.

$$f(x)=F'(x)$$

Свойства функции плотности распределения:

1. плотность распределения является неотрицательной функцией: $f(x)\ge 0$
2. $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx=P(x_1\le x\le x_2)$
3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$
4. $\int\limits_{-\infty}^{x} f(\tau)d\tau=P(X<x)=F(x)$

Если случайная величина задана плотностью распределения, ее функцию распределения можно найти по формуле

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(\tau)d\tau.$$

Задача № 18.

Непрерывная случайная величина задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}a, x\in(0,3)\\ 0, x\notin(0,3)\end{cases}$$

Вычислить параметр a и функцию распределения $F(x)$.

Решение.

Значение параметра a найдем с помощью уравнения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{3} adx + \int_{3}^{\infty} 0dx = 0 + ax\Big|_0^3 + 0 = 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3},$$

следовательно $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, x \in (0,3) \\ 0, x \notin (0,3) \end{cases}.$

Функция распределения: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\tau)d\tau$.

На интервале $x \le 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$;

для $0 < x \le 3$, $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} \frac{1}{3}dx = 0 + \frac{1}{3}x$;

для $x > 3$, $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{3} \frac{1}{3}dx + \int_{3}^{x} 0dx = 0 + \frac{1}{3}x\Big|_0^3 + 0 = 1$;

таким образом, Функция распределения: $F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \frac{1}{3}x, 0 < x \le 3 \\ 1, x > 3 \end{cases}$

Функция плотности $f(x)$ или функция распределения $F(x)$ полностью описывают распределение случайной величины, однако их получение может быть очень сложной задачей. Для решения некоторых задач достаточно знать *числовые характеристики случайной величины*.

Числовые характеристики СВ

- *Математическое ожидание* – это среднее (средневзвешенное по вероятности) значение случайной величины, определяемое формулами:

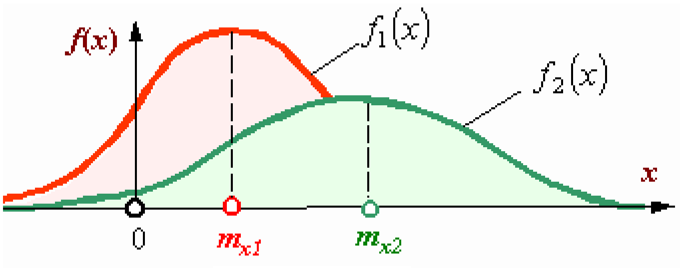
$$M(X) = m_x = \sum_i x_i \cdot p_i \quad \text{для (ДСВ);}$$

$$M(X) = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad \text{для (НСВ).}$$

Свойства математического ожидания:

1. $M(c) = c$
2. $M(cX) = cM(X)$
3. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$
4. $M(XY) = M(X)M(Y)$

где X и Y -независимые случайные величины.



$m_{x1} < m_{x2}$

- *Отклонение* это разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием $X - M(X)$

❖ Теорема 10. Математическое ожидание отклонения равно нулю:

$$M[X - M(X)] = 0$$

- *Дисперсия* случайной величины это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = \sum_i (x_i - M(X))^2 p_i \quad \text{для (ДСВ);}$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx \quad \text{для (НСВ).}$$

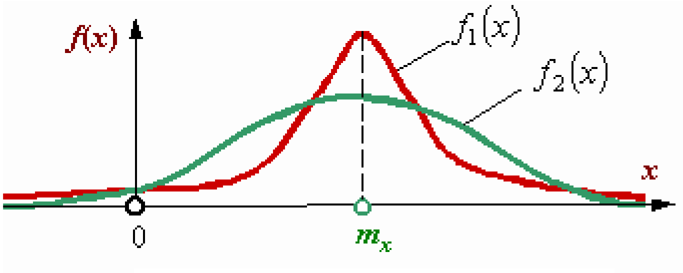
Полезная формула для расчета дисперсии:

$$D(X) = M(X^2) - M(X)^2.$$

Свойства дисперсии:

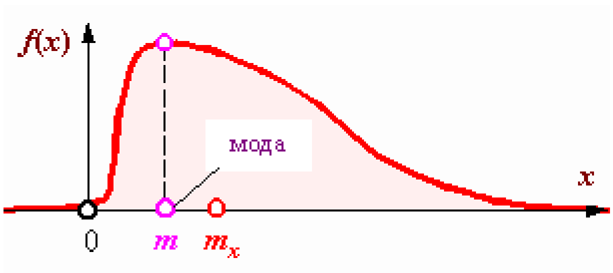
1. $D(C) = 0$
2. $D(CX) = C^2 D(X)$
3. $D(X \pm Y) = D(X) \pm D(Y)$
4. $D(X + C) = D(X)$

где X и Y - независимые случайные величины.



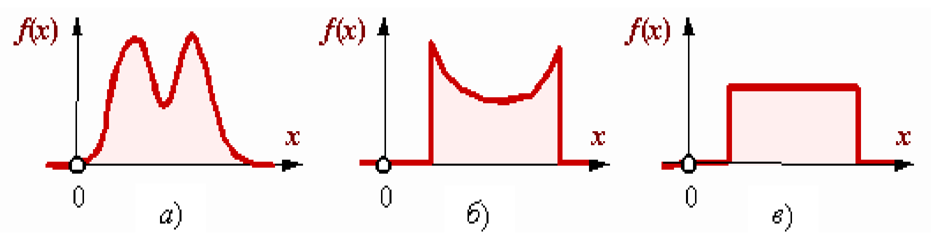
$m_{x1} = m_{x2}$, $D(X2) > D(X1)$

- *Среднее квадратичное отклонение* случайной величины это квадратный корень из дисперсии: $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$.
- *Модой* случайной величины X называется ее наиболее вероятное значение $M_O = m$.



Унимодальная случайная величина

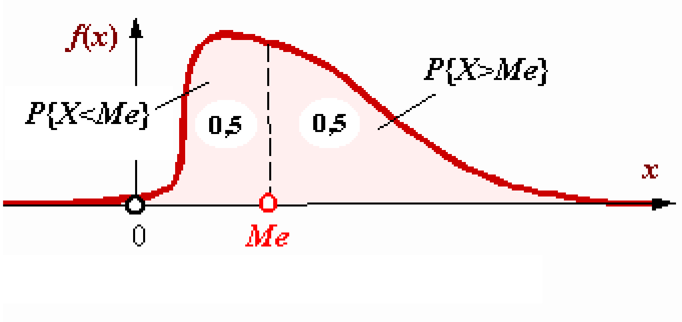
Кроме унимодальных распределений случайных величин, различают *полимодальные*, *антимодальные* и *безмодальные*.



а) полимодальная СВ; *б) антимодальная* СВ; *в) безмодальная* СВ

Медианой случайной величины X называется такое ее значение Me, для которого

$$P(x < Me) = P(x > Me) = \frac{1}{2}.$$



В случае симметричного распределения математическое ожидание, мода и медиана совпадают, например нормальное распределение.

Начальным моментом порядка s случайной величины X называется математическое ожидание величины x^s:

$$\alpha_s[X] = M\left[x^s\right]$$

$$\alpha_s[x] = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i \qquad \text{для ДСВ;}$$

$$\alpha_s[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x)dx \qquad \text{для НСВ.}$$

$\alpha_1[x] = M[x] -$ начальным моментом 1-го порядка является математическое ожидание.

Центральным моментом порядка s случайной величины X называется математическое ожидание величины $(x - M(x))^s$:

$$\mu_s = M[(x - M(x))^s].$$

$\mu_2 = M\left[(X - M(x))^2\right] = D(x)$ - Центральный момент 2-го порядка это дисперсия.

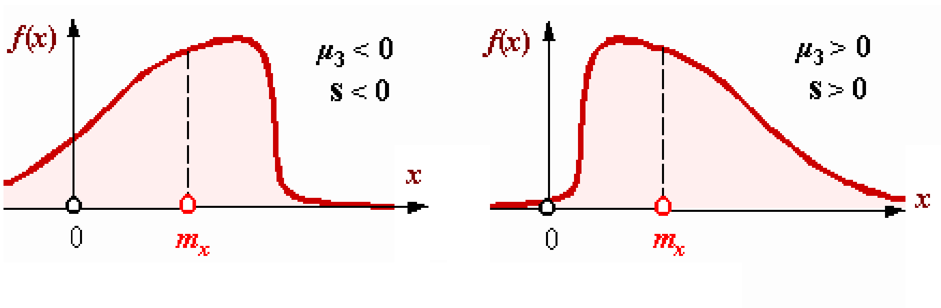
По теореме 10 центральный момент первого порядка для произвольной случайной величины равен нулю.

Третий центральный момент характеризует степень разброса случайной величины вокруг математического ожидания, а также степень асимметрии её закона распределения. В случае симметричного закона распределения $\mu_3 = 0$.

- *Коэффициентом асимметрии* (или местом асимметрии) называют величину:

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

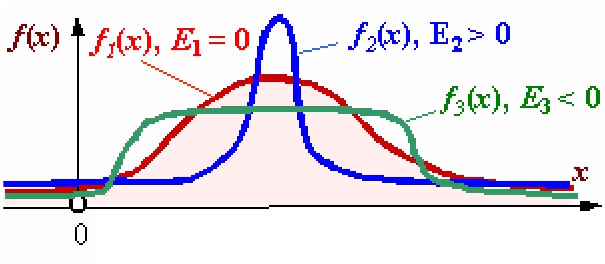
Если ‘длинная' часть распределения лежит направо от центра группирования и моды, асимметрию считают положительной и наоборот.



- Характеристикой 'островершинности', то есть большего или меньшего подъема графика в сравнении с кривой нормального распределения, служит величина, которая называется *эксцессом*

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

На рисунке изображены функции плотности трех случайных величин. При этом первая случайная величина распределена по нормальному закону с $E_1 = 0$, вторая – с $E_2 > 0$, третья – с $E_3 < 0$.



- *Квантилью порядка p* случайной величины X называется такое число ξ_p, что

$$P(X < \xi_p) = p.$$

Медиана является Квантилью порядка ½. Квантили некоторых порядков имеют специальные названия: *квартили* $\xi_{0,25}$, $\xi_{0,5}$, $\xi_{0,75}$; *децили* $\xi_{0,1}$, $\xi_{0,2}$, …, $\xi_{0,9}$; *процентили* $\xi_{0,01}$, $\xi_{0,02}$, …, $\xi_{0,99}$ делят область изменения случайной величины X соответственно на 4, 10 и 100 интервалов, значения из которых случайная величина X принимает с равными вероятностями. Для многих вероятностных распределений значения квантилей заданного уровня подсчитаны и используются при построении статистических критериев.

Задача № 18 (продолжение).

Непрерывная случайная величина задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, x\in(0,3)\\ 0, x\notin(0,3)\end{cases}$$

Найти числовые характеристики: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $Me(X)$; $Mo(X)$.

Решение.

Математическое ожидание:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_0^3 x\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}\int_0^3 xdx=\frac{1}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_0^3=\frac{9}{6}=1{,}5$$

Дисперсия:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$$

$$M(x^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int_a^b x^2\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}\int_a^b x^2dx=\frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\Big|_0^3=\frac{27}{9}=9$$

$$D(x)=9-1{,}5^2=6{,}75$$

Среднее квадратичное отклонение: $\sigma_x=\sqrt{D(X)}=\sqrt{6{,}75}=2{,}6$

Медиану можно найти путем решения уравнения $P(x<Me)=P(x>Me)=\frac{1}{2}$

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx=\int_{Me}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^{Me}\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}x\Big|_0^{Me}=\frac{Me}{3}=\frac{1}{2}$$, отсюда $Me=1{,}5$

Мода (наиболее вероятное значение СВ) в этом распределении отсутствует – это безмодальное распределение.

Случайные величины и их экономическая интерпретация

Сколько великое множество различных случайных величин и соответственно законов их распределения. Однако можно выделить несколько уже хорошо изученных групп. Каждая группа объединяет случайные величины, имеющие *закон распределения,* характерный только для этой группы. *Вероятности* конкретных значений таких случайных величин вычисляются *по одной и той же формуле*. Отличие случайных величин, входящих в одну группу, определяется различными значениями *ключевых компонент* в определяющих формулах. Ключевые компоненты формул называют *параметрами закона распределения.* Причем, давайте, рассмотрим отдельно ***группы дискретных случайных величин*** и отдельно ***группы непрерывных случайных величин***.

Дискретные распределения

1. *Равномерное дискретное распределение*

Случайная величина X имеет равномерное дискретное Распределение, если она принимает **конечное число различных значений с одинаковой вероятностью**. Если X принимает значения $x_1=1,\ x_2=2,\ \ldots,\ x_n=n$, то вероятность всех значений одинакова и равна $P(X=i)=\dfrac{1}{n}$ для всех целых значений i из интервала [1,n].

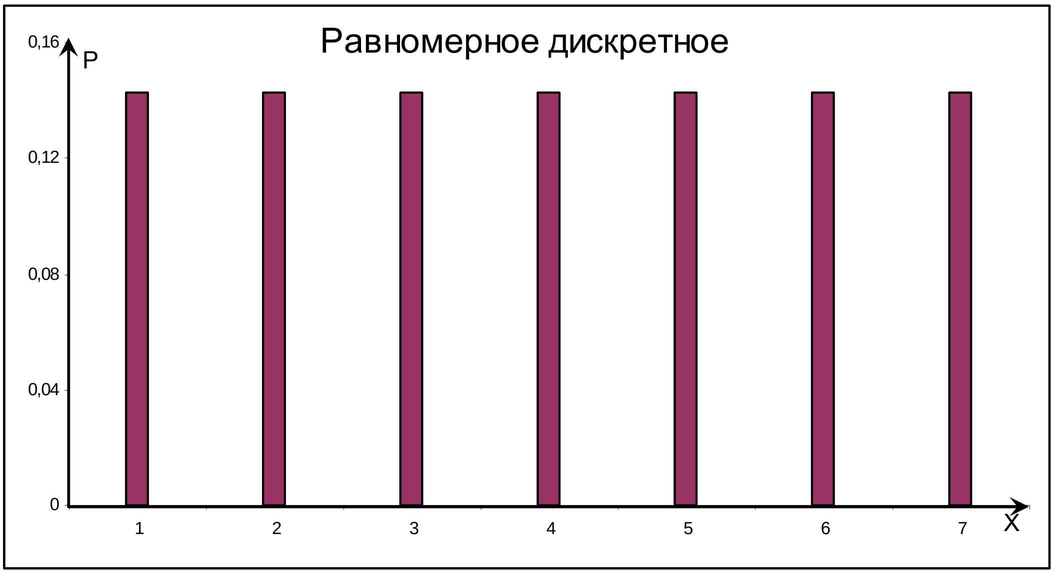
$$M(X)=\frac{n+1}{2} \text{ и } D(X)=\frac{(n+1)\cdot(2n+1)}{6}.$$

Задача № 19. Имеется семь различных ключей, из которых только один подходит к замку. Рассматривается случайная величина X – число проб при открывании замка, если опробованный ключ в последующих попытках открыть замок не участвует.

Определить математическое ожидание и построить спектр распределения.

Решение.

Вероятность того, что замок будет открыт с первого раза, равна 1/7, вероятность того, что со второго – 6/7*1/6=1/7 и так далее, то есть это равномерное дискретное распределение, следовательно $M(X)=\frac{7+1}{2}=4$.



2. *Биномиальное распределение*

Случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p $(0<p<1, n\geq 1)$, если

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k\in\overline{0,n}$$

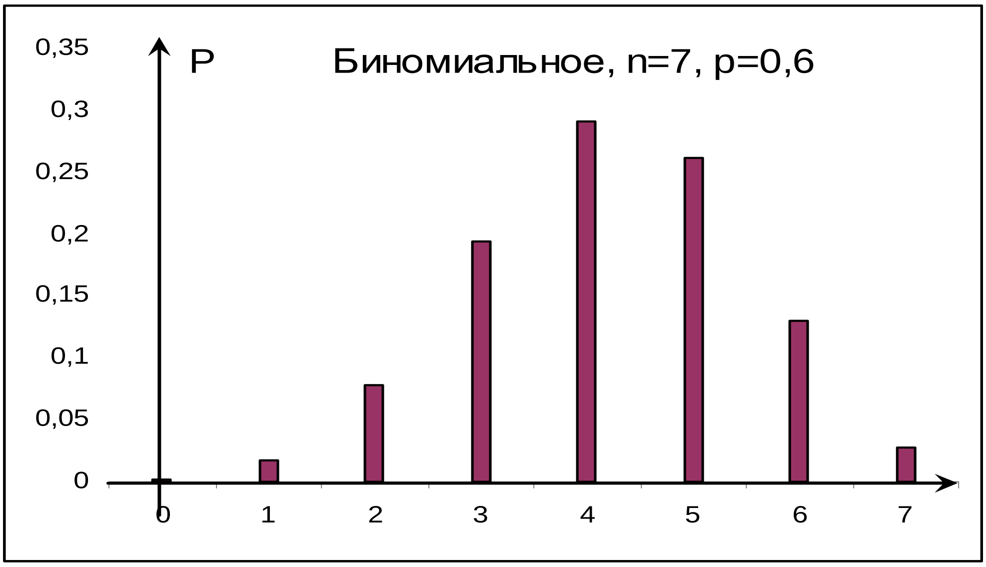
$$M(X)=np \text{ и } D(X)=np(1-p)=npq.$$

Задача № 20. Орудие производит семь выстрелов по мишени. Вероятность поражения мишени с одного выстрела составляет 0,6. Определить среднее количество поражений мишени.

Решение.

Данный эксперимент относится к биномиальному эксперименту, поскольку 1) количество испытаний фиксировано $n=7$; 2) возможно только два исхода: попал, не попал; 3) считаем, что поражение мишени при каждом выстреле не зависит от предыдущего выстрела; 4) вероятность попадания (промаха) является постоянной для каждого выстрела $p=0{,}6$ $(q=0{,}4)$.

Среднее количество поражений мишени – это математическое ожидание, следовательно, 7*0,6=4,2 примерно 4 раза из семи мишень будет поражена. Это подтверждает спектр распределения



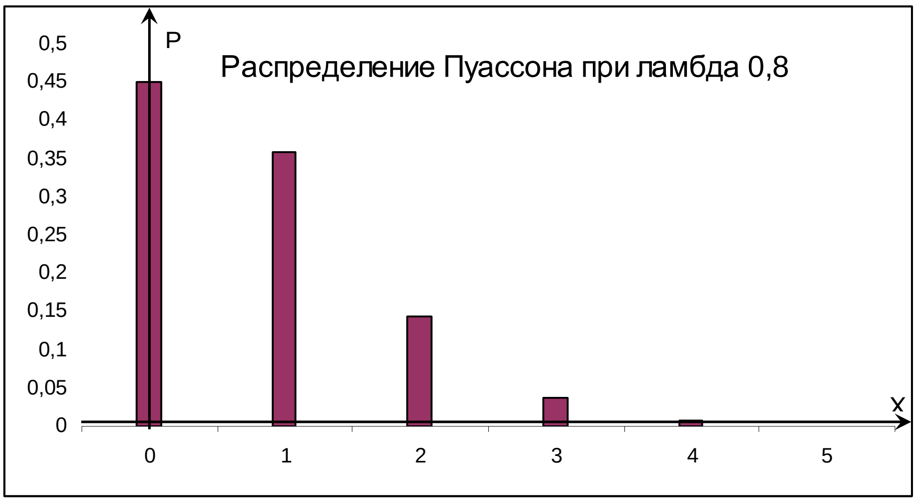
3. Распределение Пуассона

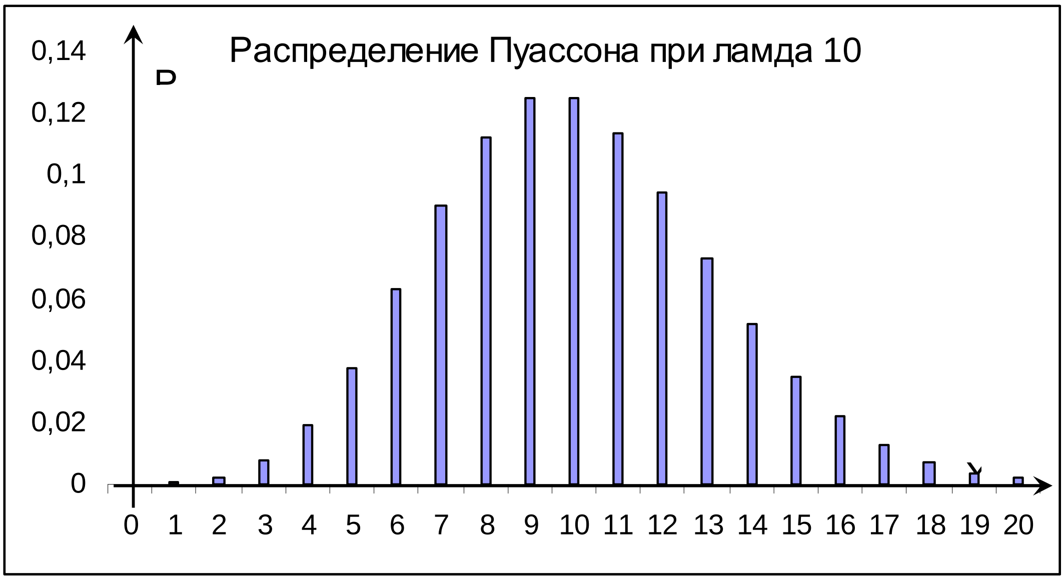
Случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda, (\lambda > 0)$, если

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

$M(X) = D(X) = \lambda$.

Распределение Пуассона является моделью для описания случайного числа появлений определенных событий в фиксированный промежуток времени или в фиксированной области пространства. Например, так распределены: количество бактерий, видимых под микроскопом; мутации, вызванные радиацией; количество звезд в определенной области неба; количество деревьев на участке леса и др.





4. Геометрическое распределение

Случайная величина X имеет геометрическое распределение с параметром p ($0<p<1$), если

$$P(X=k)=p\cdot(1-p)^k,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

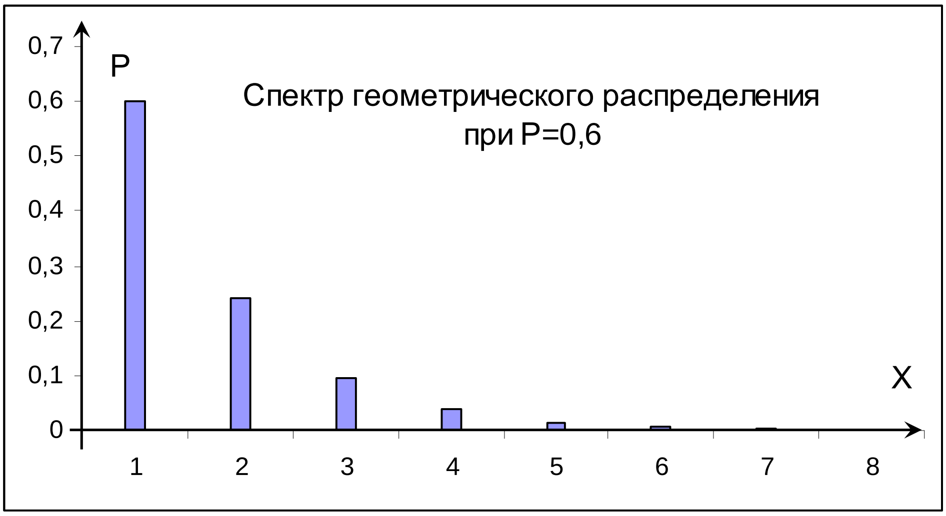
$$M(X)=\frac{(1-p)}{p} \text{ и } D(X)=\frac{(1-p)}{p^2}.$$

Задача № 21. Орудие производит выстрелы по мишени *до первого попадания*. Вероятность поражения мишени с одного выстрела составляет 0,6. Определить вероятность того, что ему не придется стрелять более трех раз.

Решение.

Особенностью этой задачи является то, что если стрелок попал в мишень, выстрелы прекращаются. *Не более трех* выстрелов это *один или два или три* выстрела. **Один выстрел** означает **выстрел с попаданием**; *два выстрела* означают: *первый промах, а второй попадание*; три выстрела означают: первый и второй промахи, а третий попадание.

$$P(X\le 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0.6+0.4\cdot 0.6+0.4^2 0.6=0{,}936$$



5. Гипергеометрическое распределение

Случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение с параметрами N, n и p $(0 \le n \le N, 0 \le p \le 1)$, если

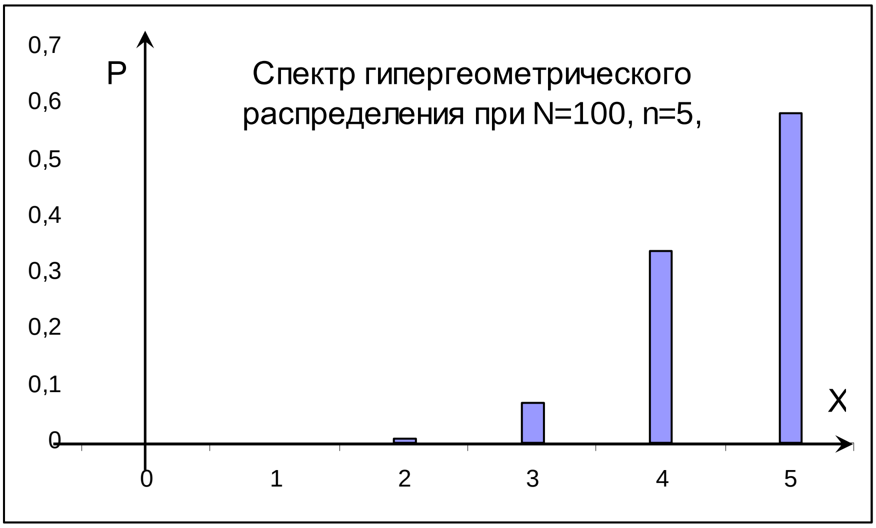
$$P(X = k) = \frac{C_{N_p}^{k} C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_N^n}, k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ \text{n}.$$

$$M(X) = np \text{ и } D(X) = npq\frac{N-n}{N-1}.$$

Задача № 22. В партии из 100 деталей 10 бракованных. Для анализа качества деталей отбирают 5 штук. Найти среднее количество стандартных деталей среди отобранных.

Решение.

N=100, n=5, p=90/100=0.9. Среднее означает математическое ожидание, 5*0,9=4,5.



Непрерывные распределения

1. *Равномерное непрерывное распределение*

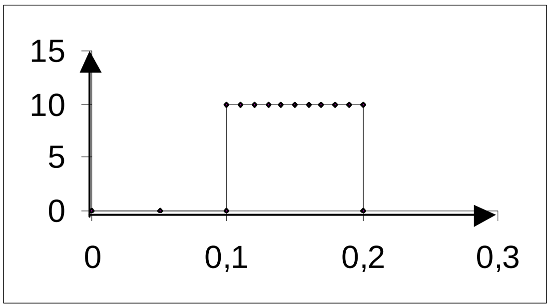
Случайная величина X имеет равномерное распределение на интервале $[a,\quad b]$, если ее плотность вероятности вычисляется по формуле

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, x\in[a\quad b]\\ 0, x\notin[a\quad b]\end{cases}$$

$$M(X)=\frac{a+b}{2} \text{ и } D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Задача № 23. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02А.

Решение.



Ошибку округления отсчета можно рассматривать как СВ X, которая распределена равномерно в интервале между двумя соседними целыми делениями. По условию задачи длина интервала составляет 0,1, следовательно $f(x)=\frac{1}{0.1}=10$. Ошибка отсчета превысит 0,02, если она будет заключена в интервале (0.02; 0.08). Поэтому

$$P(0.02<X<0.08)=\int_{0.02}^{0.08}10dx=10\cdot 0.08-10\cdot 0.02=0.6.$$

Итак, вероятность того, что ошибка отсчета превысит 0,02 составляет 0,6.

2. *Показательное (экспоненциальное) распределение*

Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda(\lambda>0)$, если ее плотность вероятности вычисляется по формуле

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda ч}, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}.$$

$$M(X)=\frac{1}{\lambda} \text{ и } D(X)=\frac{1}{\lambda^2};\ F(x)=1-e^{-\lambda x}(x\ge 0)$$

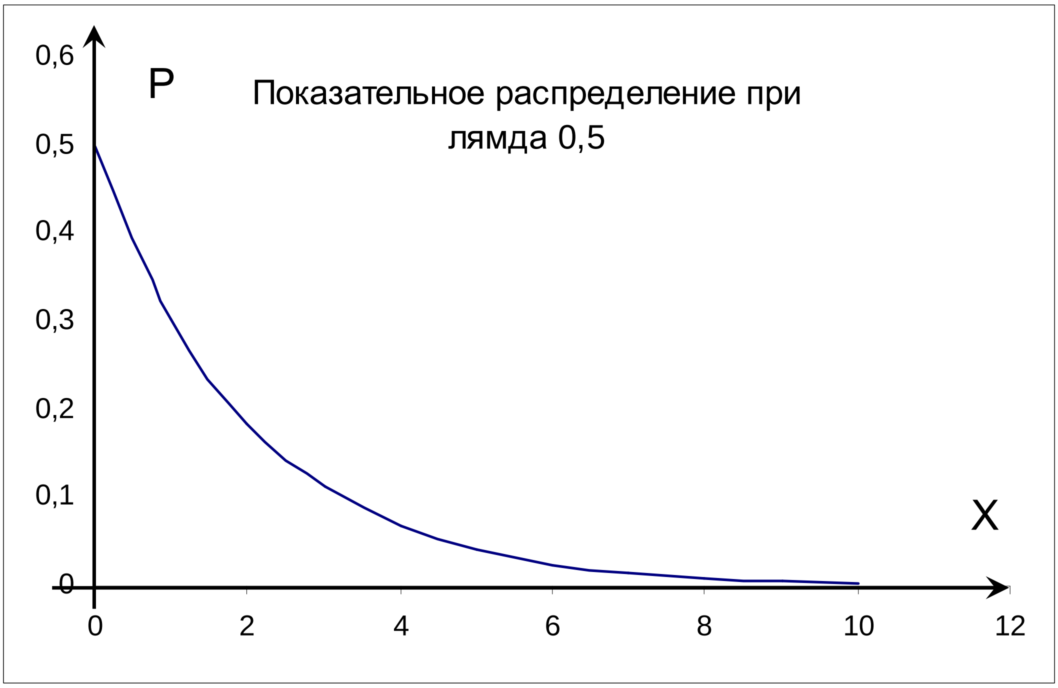
Это распределение часто встречается в моделировании случайных процессов, оно обладает так называемым свойством отсутствия последействия.

Задача № 24. На шоссе установлен контрольный пункт для проверки технического состояния автомобилей. Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение СВ Т – времени ожидания контролера очередной машины, если поток машин простейший и время (в часах) между прохождениями машин через контрольный пункт распределено по показательному закону $f(t)=5e^{-5t}$.

Решение.

$M(X)=\frac{1}{\lambda}$ и $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}$, $\lambda=5$. $M(X)=\frac{1}{5}\text{часа}=12\text{мин}$.

Длительность времени безотказной работы также распределена по показательному закону.



Пусть элемент начинает работать в момент времени $t_0=0$, а в момент t происходит отказ. Непрерывная случайная величина Т – длительность времени безотказной работы элемента, а λ - интенсивность отказов (среднее число отказов в единицу времени). Тогда $F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t}(\lambda>0)$ определяет вероятность отказа элемента за время длительностью t.

Функция надежности $R(t)=e^{-\lambda t}$ определяет *вероятность безотказной работы элемента за время t*.

Задача № 25. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t)=P(T<t)=1-e^{-0{,}01t}\,(\lambda>0)$. Найти вероятность того, что за время длительностью $t=50ч$: а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

Решение.

а) $F(50)=P(T<50)=1-e^{-0{,}01\cdot 50}=1-e^{-0{,}5}=1-0{,}606=0{,}394$;

б) $R(50)=e^{-0{,}01\cdot 50}=0{,}606$.

3. Нормальное распределение

Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами μ и σ^2, если ее плотность вероятности вычисляется по формуле

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x\in(-\infty,\infty)$$

$$M(X)=\mu \text{ и } D(X)=\sigma^2.$$

Нормальное распределение называют также гауссовским распределением или законом Гаусса. Если $\mu=0$ и $\sigma^2=1$, то распределение называют *стандартным нормальным распределением*. Линейное преобразование $Y=(X-\mu)/\sigma$ приводит произвольную нормально распределенную величину X к стандартному нормальному распределению.

- Вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее *интервалу* (α,β), равна

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right),\text{ где } \Phi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx \text{ - функция Лапласа.}$$

- Вероятность того, что *абсолютная величина отклонения меньше положительного числа* δ, составляет

$$P(|X-\mu|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

- *Правило трех сигм*: нормально распределенная случайная величина с большой вероятностью принимает значения, близкие к своему математическому ожиданию,

$$P(|X-\mu|>\sigma)=0.3173,$$

$$P(|X-\mu|>2\sigma)=0.0455,$$

$$P(|X-\mu|>3\sigma)=0.0027,$$

это означает, что 99% значений нормально распределенной случайной величины находятся на интервале $(-3\sigma,+3\sigma)$.

Фундаментальную роль, которую играет нормальное распределение в теории вероятностей и математической статистике, объясняется тем, что при достаточно широких условиях распределение суммы случайных величин с ростом числа слагаемых асимптотически сходится к нормальному (центральная предельная теорема).

Задача № 26. Рост студентов второго курса экономического факультета распределен по нормальному закону со средним 1,65 и средним квадратичным отклонением 0,05. а) Найти вероятность того, что рост наугад выбранного студента составит не менее 1,70; б) найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет рост случайно выбранного студента; в) построить схематический график функции плотности и функции распределения этой случайной величины.

Решение.

а) $P(0<X<1{,}70)=\Phi\left(\dfrac{1{,}70-1{,}65}{0{,}05}\right)-\Phi\left(\dfrac{0-1{,}65}{0{,}05}\right)=\Phi(1)-\Phi(-33)=$

$=0{,}3413+0{,}5=0{,}8513$

б) применим правило трех сигм, 1-0,9973=0,0027

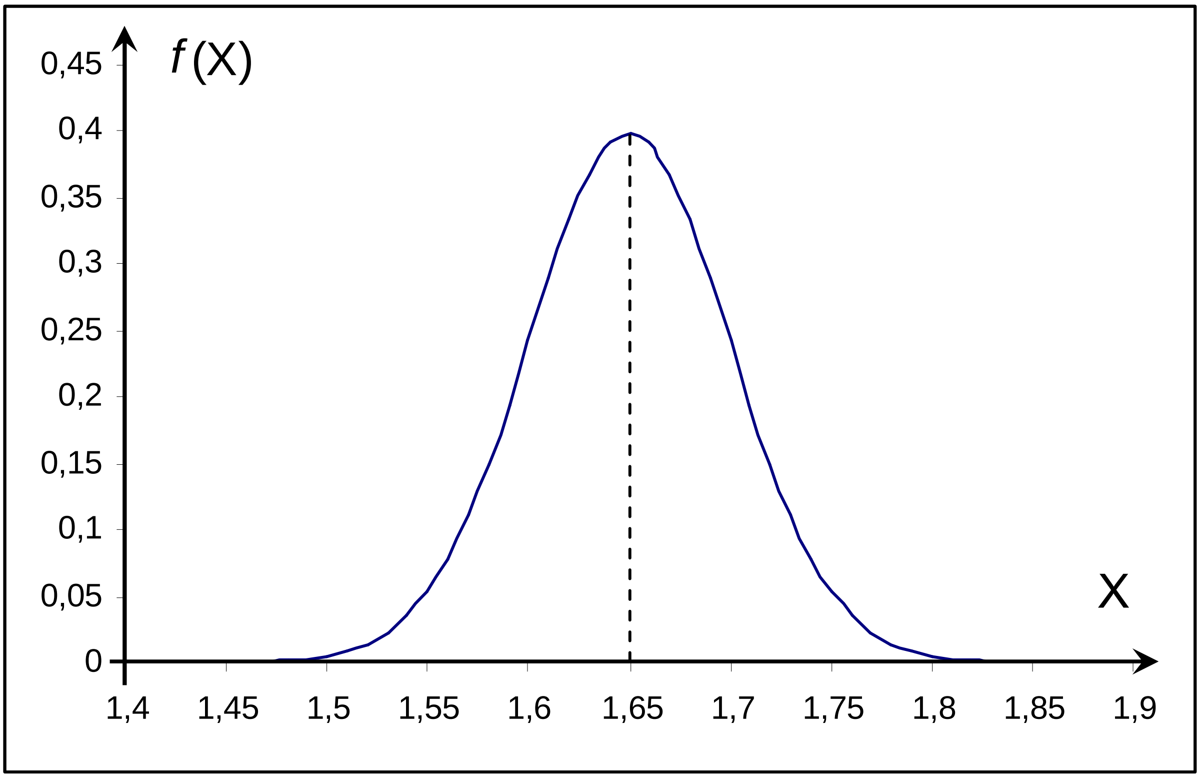
$$P(|X-\mu|>3\sigma)=0.0027,$$

следовательно, этот интервал

$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)=(1{,}65-3\cdot 0{,}05;1{,}65+3\cdot 0{,}05)=(1{,}50;\ \ 1{,}80).$

используем эти данные для построения графиков.

в) функция плотности распределения



Задача № 27. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,8 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратичным отклонением $\sigma = 0{,}3\text{мм}$, найти, сколько будет годных шариков среди 100 изготовленных.

Решение.

Так как X – отклонение (диаметра шарика от проектного размера), то $M(x) = \mu = 0$.

Воспользуемся формулой

$$P(|X-\mu| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{0{,}8}{0{,}3}\right) = 2\Phi(2{,}66) = 2\cdot 0{,}4961 = 0{,}9922.$$

Таким образом, вероятность отклонения, меньшего 0,8 мм, равна 0,99. Отсюда следует, что примерно 99 шариков из 100 окажутся годными.

Многомерные случайные величины

Случайным вектором или (***многомерной случайной величиной***) называют вектор $\overline{X}=(X_1, \quad X_2, \quad \ldots \quad X_n)$, компоненты которого представляют собой случайные величины.

Например. Станок-автомат штампует стальные плитки. Если контролируемыми параметрами являются длина X и ширина У, то имеем двумерную случайную величину (X, У); если контролируется и высота Z, то имеем трехмерную величину (X, У, Z).

Двумерную случайную величину $(X,\ Y)$ геометрически можно истолковать как случайную точку $M(X,\ Y)$ на плоскости (т.е. **точку со случайными координатами**), либо как случайный вектор $\overline{OM}$.

Многомерные случайные величины, как и одномерные, бывают *дискретными* и *непрерывными*.

Законом распределения дискретной двумерной случайной величины называют перечень возможных значений этой величины (пар чисел (x_i, y_j)) и их вероятностей $p(x_i, y_j)$.

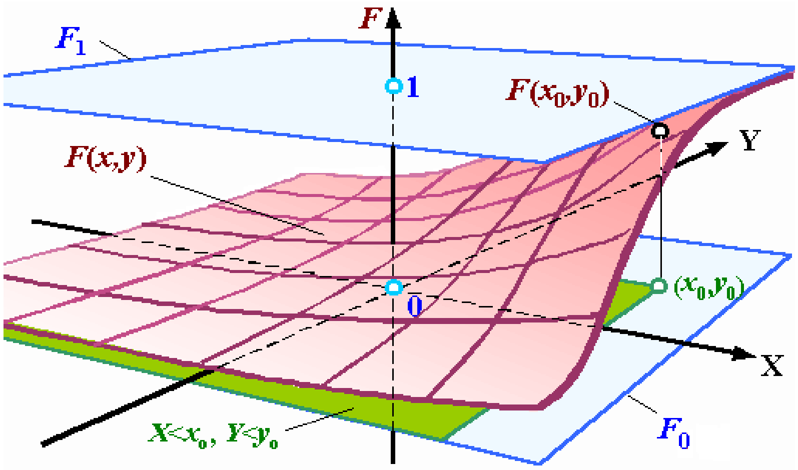
Например. Двумерная случайная величина задана законом распределения

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,30	0,20
y_2	0,06	0,18	0,16

Очевидно, что $\sum_i^3 \sum_j^2 p(x_i, y_j)=1$

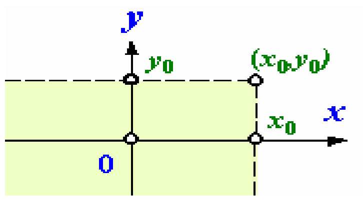
Интегральная функция распределения случайного вектора - это такая функция $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, которая при конкретных значениях своих аргументов численно равна вероятности того, что все компоненты случайного вектора окажутся меньше соответствующих аргументов, т.е. $F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = P\{X_1<x_1, X_2<x_2, \ldots, X_n<x_n\}$.

В общем случае интегральная функция непрерывного двумерного случайного вектора представляет собой криволинейную поверхность *F(x,y)*, заключенную между двумя неограниченными плоскостями F_0 и F_1, которые определяются соответственно равенствами F=0 и F=1.



Поверхность *F(x,y)* асимптотически приближается к плоскости F_0, когда или $x \to -\infty$, или $y \to -\infty$, или одновременно $x \to -\infty$ и $y \to -\infty$. При одновременном выполнении условий $x \to +\infty$ и $y \to +\infty$ поверхность *F(x,y)* асимптотически приближается к плоскости F_1.

Интегральная функция двумерного случайного вектора **Z** = (X,Y) – это такая функция $F(x,y)$, которая при каждых конкретных значениях своих аргументов x и y численно равна вероятности того, что случайные компоненты вектора окажутся меньше соответствующих аргументов, т.е. $F(x,y) = P\{X<x, Y<y\}$. Другими словами, интегральная функция двумерного случайного вектора в конкретной точке (x_0,y_0) равна вероятности попадания случайного вектора на затененный участок плоскости координат $X0Y$.



Интегральная функция двумерного случайного вектора $(X,\ Y)$ обладает следующими свойствами:

1. Значения интегральной функции удовлетворяют двойному неравенству

$$0 \le F(x,y) \le 1;$$

2. $F(x,y)$ есть неубывающая функция по каждому аргументу, т.е.

$$F(x_2,y) \ge F(x_1,y),\ \textit{если}\ x_2 > x_1;$$

$$F(x,y_2) \ge F(x,y_1),\ \textit{если}\ y_2 > y_1$$

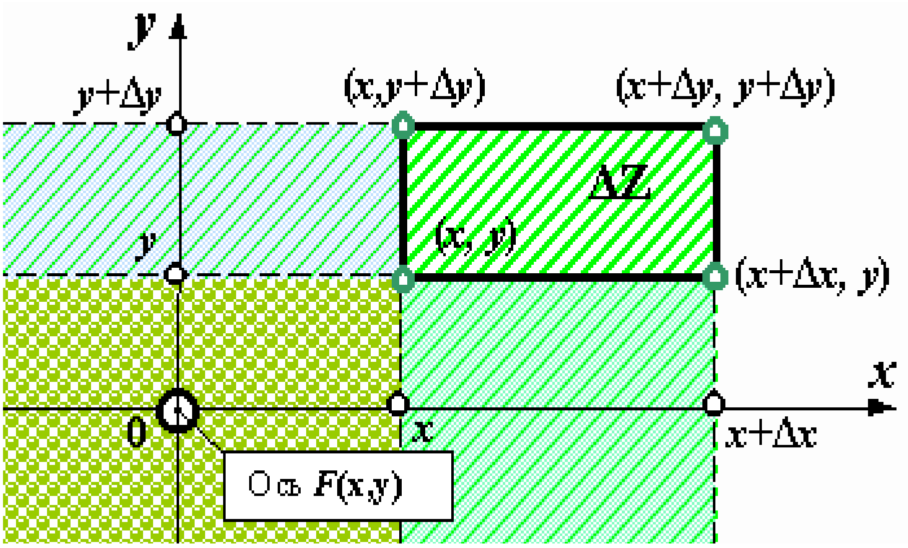
3. Имеют место предельные соотношения: $F(+\infty,+\infty)=1$,

$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$;

4. При $y = +\infty$ интегральная функция вектора становится интегральной функцией составляющей X: $F(x, +\infty) = F_1(x)$; при $x = +\infty$ интегральная функция вектора становится интегральной функцией составляющей Y: $F(+\infty, y) = F_2(y)$.

Вероятность попадания случайного вектора в прямоугольник ΔZ определяется формулой

$$P\{(X, Y) \in \Delta Z\} = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x, y).$$



Числовые характеристики случайного вектора

- ***Математическое ожидание*** случайного вектора $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ есть такой неслучайный вектор $\mathbf{M}=(m_1,m_2,\ldots,m_n)$, компонентами которого являются математические ожидания соответствующих компонент случайного вектора **X**.
- ***Дисперсия*** случайного вектора $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ есть такой неслучайный вектор $\mathbf{D}=(D_1,D_2,\ldots,D_n)$, компонентами которого являются дисперсии соответствующих компонент случайного вектора **X**.
- ***Корреляционным моментом*** k_{xy} двумерного случайного вектора (X,Y) называют второй смешанный центральный момент $k_{xy} = \mathrm{m}_{11} = \mathrm{M}[(X-m_x)(Y-m_y)]$

Для *дискретных* случайных величин корреляционный момент определяется по формуле $k_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - m_x)(y_j - m_y)p_{ij}$, где $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$;

m_x – математическое ожидание компоненты X случайного вектора (X,Y);

m_y – математическое ожидание компоненты Y случайного вектора (X,Y);

n – количество возможных значений компоненты X;

m – количество возможных значений компоненты Y.

Для *непрерывных* случайных величин корреляционный момент определяется по формуле $k_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x_i - m_x)(y_j - m_y)f(x,y)dxdy$, где $f(x,y)$ – плотность распределения случайного вектора (X,Y).

Корреляционный момент характеризует *степень разброса случайных величин* вокруг их математических ожиданий, *а также степень линейной зависимости* между случайными величинами X и Y.

Для характеристики *только степени линейной зависимости* между случайными величинами X и Y используется ***коэффициент корреляции***

$$r_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Значение коэффициента корреляции r_{xy} находится в диапазоне от –1 до +1. Если X и Y являются независимыми между собой величинами, то $r_{xy} = 0$. Если X и Y связаны *линейной* зависимостью $Y = aX + b$, то ($r_{xy} = -1$ при $a < 0$) и ($r_{xy} = 1$ при $a > 0$).

Для случайного n-мерного вектора $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ задается n-мерная ***корреляционная матрица***

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2j} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \cdots & k_{ij} & \cdots & k_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nj} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix},$$

где $k_{ij} = M[(X_i\text{-}m_i)\,(X_j\text{-}m_j)]$;

$k_{ii} = M[(X_i\text{-}m_i)^2] = D_i$ – дисперсия i-й компоненты случайного вектора **X**; $k_{ij} = k_{ji}$.

Для анализа степени линейной зависимости между компонентами случайного вектора $\boldsymbol{X}$ используется ***нормированная корреляционная матрица*** **R**, элементами которой являются коэффициенты корреляции r_{ij} соответствующих компонент вектора $\boldsymbol{X}$, где $r_{ij} = \dfrac{k_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$;

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1j} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2j} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{ij} & \cdots & r_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nj} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix},$$

$r_{ii} = \dfrac{D_i}{\sigma_i^2} = 1$; $r_{ij} = r_{ji}$.

Две случайные величины X и Y называют *<u>коррелированными</u>*, если их корреляционный момент (коэффициент корреляции) *<u>отличен от нуля</u>*. Две коррелированные величины также и зависимы. Обратное предположение не всегда имеет место, если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

Предельные теоремы ТВ

Закон больших чисел.

Как мы знаем, нельзя заранее уверенно предвидеть, какое из возможных значений примет случайная величина в итоге испытания; это зависит от многих случайных причин, учесть которые мы не в состоянии. Однако, при некоторых сравнительно широких условиях суммарное поведение достаточно большого числа случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится закономерным, что позволяет предвидеть ход многих явлений. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название ***закона больших чисел***. Самыми известными из них являются теорема Чебышева и Бернулли.

❖ ***Теорема БЕРНУЛЛИ (1713г.)***

Если в каждом из ***n*** независимых испытаний вероятность ***p*** появления события **А** постоянна, то, как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты $\frac{m}{n}$ от вероятности ***p*** по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико.

Другими словами, ε сколь угодно малое положительное число, то при соблюдении условий теоремы, будет иметь место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1,$$

т.е. при достаточно большом ***n,*** относительная частота $\frac{m}{n}$ обладает свойством устойчивости и оправдывает статистическое определение вероятности. Можем проиллюстрировать это свойство следующей таблицей.

Число бросаний монеты ***n***	Число появлений герба ***m***	Относительная частота $\frac{m}{n}$
4040	2048	0.5069
12000	6019	0.5016
24000	12012	0.5005

❖ ***Теорема Чебышева.***

Если X_1, X_2, …, X_n попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены, то как бы мало ни было положительное число ε вероятность неравенства

$$\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon,$$

будет близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1$$

Если случайные величины X_1, X_2, …, X_n имеют одно и тоже математическое ожидание $M(X_i)=a$, то

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right)=1$$

Сущность теоремы Чебышева: среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин утрачивает характер случайной величины.

Известно, что нормальное распределение случайной величины широко распространено на практике. Объяснение этому дал русским математик А.М. Ляпунов (центральная предельная теорема теории вероятностей).

Следствие теоремы Ляпунова: если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.

Пример. Пусть производится измерение некоторой фиксированной величины. Любое измерение дает лишь приближенное значение измеряемой величины, поскольку на результат измерения оказывают влияние очень многие независимые случайные факторы (температура, колебания прибора, влажность и др.). Каждый из этих факторов порождает ничтожную «частную ошибку». Рассматривая суммарную ошибку как сумму очень большого числа взаимно независимых частных ошибок, мы в праве заключить, что суммарная ошибка имеет распределение, близкое к нормальному. Опыт подтверждает справедливость такого заключения.

Элементы теории случайных процессов и теории массового обслуживания

Теория систем массового обслуживания (СМО) начала развиваться в начале XX столетия. В последние годы применение теории СМО в экономике приобрело особую актуальность в связи с ее применением в финансово-экономической сфере (банки, страховые организации, налоговые органы, аудиторские организации). Теория СМО широко применяется в сфере обслуживания (различные системы связи, погрузочно-разгрузочные комплексы, АЗС, магазины, билетные кассы, ремонтные предприятия, больницы и др.)

Марковские процессы и потоки событий

Случайным процессом или *случайной функцией* $\mathbf{S}(\boldsymbol{t})$ называется функция, которая каждому моменту времени t из некоторого временного промежутка ставит в соответствие единственную случайную величину $S(t)$.

Случайная функция характеризует изменение случайной величины во времени. Если система S изменяет во времени свои состояния случайным образом, то будем говорить, что в системе S протекает *случайный процесс*. По множеству состояний системы S случайный процесс, протекающий в ней, может быть *дискретным* или *непрерывным*.

В дальнейшем мы будем иметь дело с дискретными случайными процессами. В этом случае система переходит от состояния к состоянию скачком (в непрерывных процессах система меняет свои состояния постепенно и плавно). Будем полагать, что в каждый момент времени система может находиться только в одном из своих состояний.

Случайный процесс, протекающий в системе S, называется *Марковским*, если он обладает свойством *отсутствия последействия*, или *отсутствия памяти,* которое состоит в том, что для любого фиксированного момента времени t_0 вероятность состояния в будущем (при $t > t_Q$) зависит только от ее состояния в настоящем при $t = t_0$ и не зависит от того, как развивался этот процесс в прошлом (при $t<t_0$).

В финансово-экономической сфере такими случайными процессами можно считать, например, процессы динамики биржевой стоимости ценных бумаг, процесс обслуживания клиентов в банках и т. п.

Потоки событий

Потоком называется последовательность событии, наступающих одно за другим, в общем случае, в случайные моменты времени. Среднее число событий в потоке за единицу времени называется его *интенсивностью*, или *средней плотностью потока*.

События в потоке называются *однородными*, если они различаются только по моментам времени их наступления, и *неоднородными* в противном случае. В дальнейшем будем рассматривать только потоки однородных событий, не оговаривая это специально.

Поток событий называется *потоком без последействия*, или *потоком без памяти*, если для любой пары непересекающихся промежутков времени число событий за один из этих промежутков не зависит от числа событий за другой промежуток. Очевидно, что *регулярный* поток событий, в котором события наступают через строго определенные промежутки времени, не обладает свойством отсутствия последействия, поскольку его регулярность порождает последействие.

Поток событий называется *ординарным*, если вероятность наступления за достаточно малый (элементарный) промежуток времени более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью наступления одного события за этот промежуток.

Поток событий называется *стационарным*, если вероятность появления какого-либо числа событий за некоторый промежуток времени зависит только от длины этого промежутка и не зависит от момента его начала. Очевидно, что для стационарного потока его вероятностные характеристики не зависят от времени, что и отражено в его названии.

Поток событий, обладающий свойствами отсутствия последействия и ординарности, называется *пуассоновским*. Стационарный пуассоновский поток называется *простейшим*. Интенсивность простейшего потока не зависит от времени в силу его стационарности.

❖ **Теорема 11.** *Для простейшего потока событий с интенсивностью* λ *случайное число событий* $x(\tau) = m(m = 1,2,...,)$, *наступающих за промежуток времени* τ, *распределено по закону Пуассона* $P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}$.

Закон распределения Пуассона справедлив для вероятности наступления массовых и редких событий.

Дискретный марковский случайный працесс с непрерывным временем

Будем рассматривать случайные процессы с *непрерывным временем.* Пусть система S имеет *n* возможных состояний. Тогда *вероятностью* $p_i(t)$ *i*-го *состояния системы* в момент времени *t* будем называть вероятность $p(S_1(t))$, *i* = 1, 2, ..., *n* события $S_1(t)$, состоящего в том, что система *S в* момент времени *t* находится в состоянии S_1. При этом выполнено нормировочное условие

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1, t \geq 0$$

В процессе с непрерывным временем рассматривают *плотности вероятности перехода* λ_{ij} системы *S* из состояния S_i в состояние S_j как предел отношения

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(t, \Delta t)}{\Delta t}.$$

Здесь $p_{ij}(t, \Delta t)$ — вероятность того, что система *S*, находившаяся в момент времени *t* в состоянии S_i, за малый промежуток времени Δt перейдет в состояние S_j.

Отсюда выводятся *уравнения Колмогорова* — система, содержащая *n* дифференциальных уравнений для определения вероятностей $p_i(t)$. Они являются основой теории систем массового обслуживания и будут рассмотрены далее.

Системы массового обслуживания

Системы массового обслуживания (СМО) представляют собой системы специфического вида. Основой СМО является определенное число обслуживающих устройств - *каналы обслуживания*. Роль каналов в реальности могут выполнять приборы, операторы, продавцы, линии связи и пр.

Структура и классификация СМО

Предназначение СМО состоит в обслуживании *потока заявок* *(требований),* представляющих последовательность событий, поступающих нерегулярно и в заранее неизвестные и случайные моменты времени. Само *обслуживание заявок* также имеет непостоянный характер, происходит в случайные промежутки времени и зависит от многих и даже неизвестных причин. Случайный характер потока заявок и времени их обслуживания обусловливает неравномерность загрузки СМО: на входе могут накапливаться необслуженные заявки (перегрузка СМО) либо заявок нет или их меньше, чем свободных каналом (недогрузка СМО). В СМО поступает поток заявок; часть из них принимается на обслуживание в каналы, часть ждет в очереди на обслуживание, часть покидает систему необслуженными.

Основными элементами СМО являются:

1) входной поток заявок;
2) очередь;
3) каналы обслуживания;
4) выходной поток заявок (обслуженные заявки).

Эффективность функционирования СМО определяется ее *пропускной способностью* — относительным числом обслуженных заявок.

По числу каналов n все СМО разделяются на одноканальные ($n = 1$) и многоканальные ($n > 1$). Многоканальные СМО могут быть как однородными (по каналам), так и разнородными (по продолжительности обслуживания заявок).

По дисциплине обслуживания различают три класса СМО.

1. СМО *с отказами* (нулевое ожидание или явные потери). «Отказная» заявка вновь поступает в систему, чтобы ее обслужили (например, вызов абонента через АТС).

2. СМО *с ожиданием* (неограниченное ожидание или очередь). При занятости всех каналов заявка поступает в очередь и в конце концов будет выполнена (торговля, сферы бытового и медицинского обслуживания).

3. СМО *смешанного типа* (ограниченное ожидание). Имеется ограничение на длину очереди (сервис по обслуживанию автомобилей). Другой вид ограниченного ожидания - ограничение на время пребывания заявки в СМО (ПВО, особые условия обслуживания в банке).

В дальнейшем мы будем рассматривать *открытые* (поток заявок неограничен), *упорядоченные* (заявки обслуживаются в порядке их поступления) и *однофазные* СМО (однородные каналы выполняют одну и ту же операцию).

Целью теории систем массового обслуживания является выработка рекомендаций по рациональному построению СМО и рациональной организации их работы и регулированию потока заявок. Отсюда вытекают задачи, связанные с теорией массового обслуживания: *установление зависимостей работы СМО от ее организации, характера потока заявок, числа каналов и их производительности, правил работы СМО*.

Основные показатели эффективности работы СМО

Эффективность работы систем массового обслуживания характеризуют показатели, которые можно разбить на три группы. 1. Группа показателей эффективности использования СМО:

- абсолютная пропускная способность - среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени (A);
- относительная пропускная способность - отношение абсолютной пропускной способности к среднему числу заявок, поступивших в систему за единицу времени (Q);
- средняя продолжительность периода занятости СМО;

- . коэффициент использования СМО - средняя доля времени, в течение которого система занята обслуживанием заявок.

2. Показатели качества обслуживания заявок:

- среднее время ожидания заявки в очереди $\left(\overline{T}_{line}\right)$
- среднее время пребывания заявки в СМО $\left(\overline{T}_{sys}\right)$;
- . вероятность отказа заявки в обслуживании без ожидания;
- вероятность немедленного приема заявки;
- закон распределения времени ожидания заявки в очереди и СМО;
- среднее число заявок в очереди $\left(\overline{N}_{line}\right)$;
- среднее число заявок, находящихся в СМО $\left(\overline{N}_{sys}\right)$.

3. Показатели эффективности функционирования пары «СМО - потребитель» (вся совокупность заявок или их источник, например, средний доход в единицу времени от СМО). Эта группа полезна, когда доход от СМО и затраты на ее обслуживание измеряются в одних и тех же единицах и отражают специфику работы СМО.

Случайный процесс в СМО

Процессы поступления и обслуживания заявок в СМО являются случайными, что обусловлено случайным характером потока заявок и длительности их обслуживания. Применение аппарата случайных процессов упрощает исследование СМО. По характеру потоков событий СМО разделяются на Марковские и не Марковские; в дальнейшем мы будем иметь дело с системами первого типа, т. е. в основе СМО предполагается Марковский случайный процесс, когда вероятность состояния СМО в будущем зависит только от ее состояния в настоящем и не зависит от прошлого. Условие Марковского случайного процесса необходимо, чтобы все потоки событий, при которых система переходит из одного состояния в другое (потоки заявок, потоки обслуживания, и т. д.), были пуассоновскими. Преимущества и полезность такого подхода состоит в том, что для выработки обоснованных рекомендаций нужно знать не точные характеристики СМО, а лишь их приближенные значения.

Рассмотрим ряд примеров: что принять за СМО, каналы обслуживания и их число, поток заявок на входе, поток обслуживания на выходе.

Пример1. **Вызов абонента, имеющего только один телефонный номер, через АТС**. Здесь *поток заявок является случайным,* если абонент занят, очередная поступающая заявка получает отказ в обслуживании»; АТС - это *одноканальная СМО* (канал обслуживания - линия связи с телефонным номером абонента) *с отказами*.

Пример2. **Инструментальная кладовая с тремя кладовщиками выдающими рабочим по их требованию одинаковые наборы инструментов во время работы; если все кладовщики заняты, очередному рабочему инструмент не выдается**. Здесь кладовую следует принять за СМО (поток заявок и поток обслуженных заявок являются случайными и зависят только от настоящего состояния), число каналов обслуживания — три; *многоканальная СМО с отказами*.

Пример3. **Работа телефонной справочной Центрального железнодорожного агентства**. *Многоканальная* СМО, число каналов - количество дежурных операторов, *СМО с ограниченной очередью* (ограничение на длину очереди - память накопителя вызовов).

Пример4. **Железнодорожная станция принимает на 5 путей пассажирские поезда и электрички, которые прибывают по расписанию каждые 15 минут на каждый из них и отбывают после обслуживания также но расписанию через 12 минут.** В данном случае теория *систем массового обслуживания неприменима*, поскольку входной и выходной потоки (приход и уход обслуженных поездов организован по расписанию) не являются случайными.

Список литературы

1. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. - М.: Наука, 1970.
2. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш.шк., 1977.
3. *Гмурман В.Е.* Руководство по решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш.шк., 1979.
4. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания, М., «Наука», 1966.
5. *Самойленко М.І, Костенко О.Б.* Теорія ймовірностей. Електронний підручник. – Харків, ХНАМГ, 2007.
6. *Красс М.С., Чупрынов Б.П.* Математические методы и модели для магистрантов экономики: Учебное пособие. – СПб.: Питер, 2006. – 496с.:ил.
7. *Чистяков В.П.* курс теории вероятностей. - М.: Наука, 1993.
8. *Розанов Ю.А.* Случайные процессы. – М.: Наука, 1971.
9. *Минько А.А.* Статистический анализ в MS Excel.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 488с.

Содержание

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Конспект лекций по курсу «Математика для экономистов: Теория вероятностей и математическая статистика» (для студентов 2 курса дневной формы обучения бакалавров направления 6.030504 – «Экономика предприятий», 6.030509 – «Учет и аудит»).

Составитель: *Анна Викторовна Белогурова*

Ответственный за выпуск : *О.Н. Штельма*

Редактор: *Н. З. Алябьев*

План 2008 , поз. 62 Л

Подп. в печать 24.03.08.	Формат 60х84 1/16	Бумага офисная
Печать на ризографе.	Условн.-печ. л. 3,0.	Учет.-изд. л. 3,5.
Тираж 200 экз.	Зак. №	

ХНАГХ, 61002, Харьков, ул. Революции, 12

Сектор оперативной полиграфии ИВЦ ХНАГХ

61002, Харьков, ул. Революции, 122